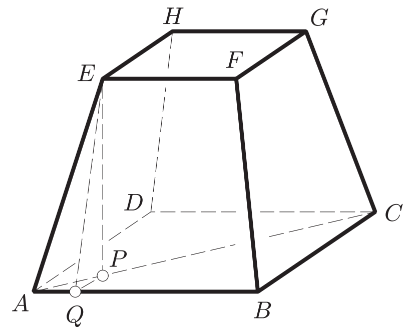
Megoldás. Tekintsük az $ABCD$ alapú, $EFGH$ fedőlapú szabályos csonkgúlát (4. ábra). A forgásszimmetria miatt mindegy, hogy melyik testátló végpontjait összekötő vonalakkal foglalkozunk. Ha az AG testátlót választjuk, megállapíthatjuk, hogy minden összekötő vonalnak metszenie kell a térbeli $BCDHEF$ hatszöget. Minthogy pedig e hatszög minden pontját A-val és G-vel a csonkagúla felületén elhelyezkedő szakasz köti össze, és két pont összekötő szakasza minden más összekötő vonalnál rövidebb, a legrövidebb összekötő vonal csak két szakaszból álló töröttvonal lehet.



4. ábra

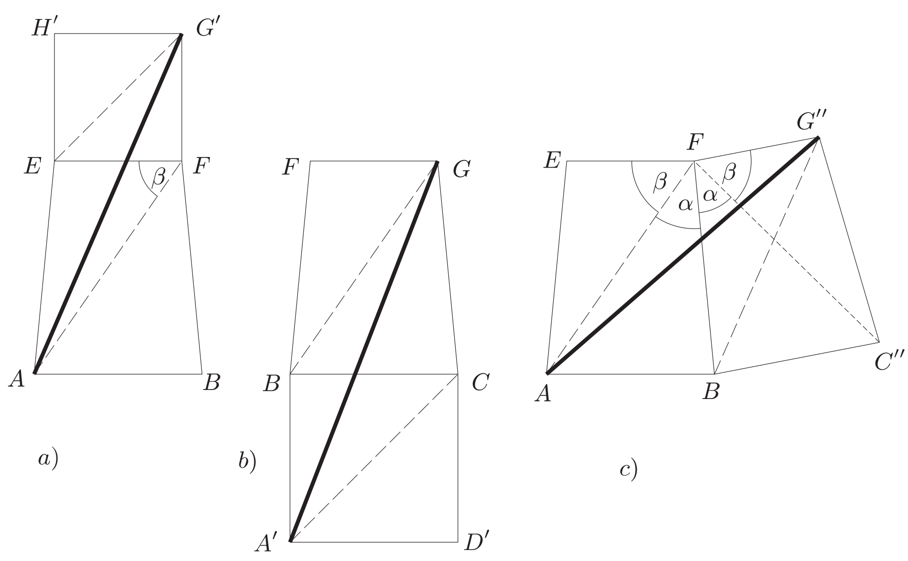
Ez vagy egy oldallapon és a fedőlapon, vagy az alaplapon és egy oldallapon, vagy pedig két oldallapon helyezkedik el. A szimmetria miatt mindegy, hogy itt melyik oldallap vagy melyik két szomszédos oldallap szerepel.

A vizsgált töröttvonal mindhárom esetben két olyan lapon halad, amelyek élben csatlakoznak. Ha e lapokat az él körül egy síkba forgatjuk, a töröttvonal is a síkba terül, s akkor lesz a legrövidebb, ha a kiterítés után nincs már törése, azaz a végpontokat összekötő egyetlen szakasszá válik. Ez persze csak akkor lehetséges, ha a kiterítés után adódó végpontok összekötő szakasza metszi a két lap közös élét. Megmutatjuk, hogy ez a bennünket érdeklő esetek mindegyikében bekövetkezik.

Csonkagúlánk $ABFE$ oldallapja szimmetrikus trapéz, melynek AB alapvonalán $45°$-nál nagyobb (és EF fedővonalán $135°$-nál kisebb) szögek nyugszanak. Ha ugyanis P és Q az E csúcsnak az alapsíkra, illetőleg az AB élre vetett vetülete, akkor az $APQ\triangle$ egyenlőszárú derékszögű, tehát $EQ > PQ = AQ$ miatt az $AEQ\triangle$-ben a nagyobbik befogóval szemközti $EAQ\sphericalangle > 45°$.

A feladat követelményére támaszkodva most azt igazoljuk, hogy $\alpha = AFB\sphericalangle < 45°$. Az alaplap köré írt körben az AB húron $45°$-os (és $135°$-os) kerületi szögek nyugszanak. Minthogy az oldallap köré írt kör sugara nagyobb, ebben az AB húron nyugvó kerületi szögek $45°$-nál kisebbek és $135°$-nál nagyobbak. Mivel pedig az $AFBQ\sphericalangle$ része a $135°$-nál kisebb $EFB\sphericalangle$-nek, valóban csak $45°$-nál kisebb lehet.

Tekintsük most már az említett három esetnek megfelelő, kiterítéssel keletkező ábrákat (5. ábra). A testátló végpontjaiból a kiterítés után adódó pontokat összekötő (vastagon meghúzott) szakasz mind a három esetben metszi a két lap közös élét. Mindhárom esetben szerepel ugyanis olyan konvex négyszög, amelynek egyik átlója a közös él, másik átlója pedig a szóban forgó összekötő szakasz. E négyszögek két szemközti oldalát szaggatottan húztuk meg. Konvexitásuk csak az a) és c) ábrarészben kíván alátámasztást, s az a) ábrában $AEF\sphericalangle < 135°$, valamint $FEG'\sphericalangle = 45°$, a c) ábrában pedig $AFB\sphericalangle < 45°$, valamint $BFG''\sphericalangle < 135°$ következménye.



5. ábra

Már csak annak megmutatására van szükségünk, hogy a vastagon meghúzott szakasz a c) ábrában a legrövidebb. A b) ábra szakasza nyilván hosszabb az a) ábráénál, hiszen vízszintes (a közös él egyenesére vetett) vetülete ugyanakkora, függőleges vetülete pedig nagyobb, mert az alapél nagyobb, mint a fedőél. Azt kell csak bizonyítanunk, hogy az a) és c) ábra szakaszaira $AG' > AG''$. Ezek a szakaszok az $AFG'\triangle$ és $AFG''\triangle$ oldalai, amelyekben két-két oldal páronként egyenlő. Ezért az ismert tételre hivatkozva

$$AFG'\sphericalangle > AFG''\sphericalangle$$

igazolása szükséges, ez azonban $\beta = AFE\sphericalangle$ jelöléssel

$$90^\circ + \beta > 2\alpha + \beta$$

alakban írható, s a már bizonyított $\alpha < 45^\circ$ következménye.