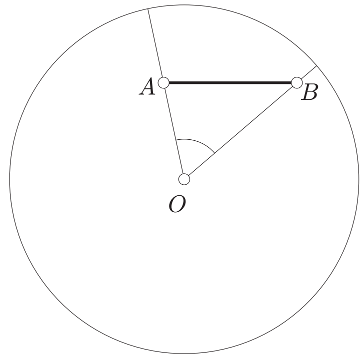
I. megoldás. A 8 pont között legalább 7 a kör középpontjától különböző pont van. Minden ilyen pont a középponttal összekötve a kör egy-egy sugarát határozza meg. Ha ezek a sugarak nem mind különbözők, két pont ugyanannak a sugárnak a körközépponttól különböző pontja, s így távolságuk a sugárnál kisebb.

Ha viszont csupa különböző sugárhoz jutottunk, akkor ezek az O középpontnál elhelyezkedő teljes szöget legalább 7 szögre bontják fel, s ezért van közöttük két olyan sugár, amelynek szöge a teljes szög hatodrészénél, $60°$-nál kisebb. Legyen a 8 pont közül való A és B ezen a két sugáron (1. ábra).

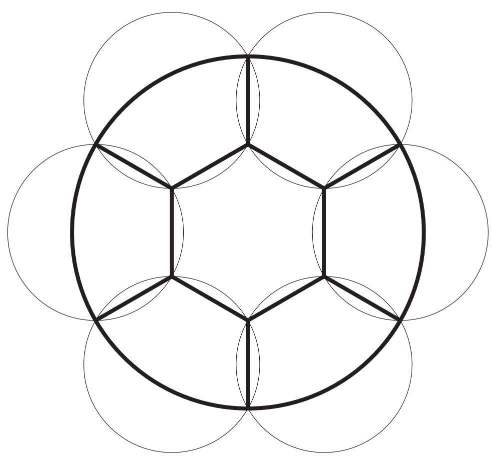


1. ábra

Minthogy $AOB\sphericalangle < 60°$, van az $OAB\triangle$-nek nagyobb szöge is. A háromszög szögeiről és szemközti oldalairól szóló tételre hivatkozva kimondhatjuk ezért, hogy az $OAB\triangle$-nek van AB-nél nagyobb oldala, hogy tehát AB kisebb az OA, OB távolságok valamelyikénél, s így kisebb az utóbbiaknál nem kisebb körsugárnál is.

Minden esetben eljutottunk tehát a 8 pont közül két olyanhoz, amely kielégíti a feladat követelményét.

II. megoldás. A körlemezt egy beírt szabályos hatszög csúcsaihoz vezető 6 sugár és ezek felezőpontjai által meghatározott szabályos hatszög segítségével 7 tartományra bontjuk fel (2. ábra). E tartományok mindegyike egy-egy olyan körben helyezkedik el, amelynek átmérője az eredeti kör sugara. Ez az eredeti körrel koncentrikus és feleakkora sugarú körre, valamint a beírt szabályos hatszög oldalaihoz tartozó Thales-körökre valóban teljesül.



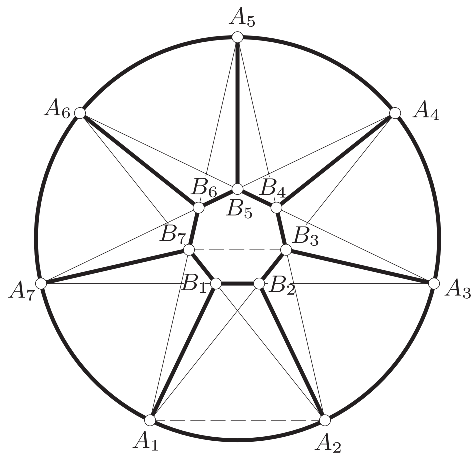
2. ábra

Tekintsük most a megadott 8 pontot és forgassuk el a kört tartományokra felosztó vonalakat a kör középpontja körül úgy, hogy a 8 pont egyike se essék felosztó vonalra. Ekkor a 7 tartomány valamelyikében legalább két pontnak kell elhelyezkednie. E két pont az illető tartományt leborító kör belsejében van, s így távolságuk a kör átmérőjénél, azaz az eredeti kör sugaránál kisebb.

Megjegyzések. 1) Nyilvánvaló, hogy a feladatban nem írhatunk 8 helyébe 7-et, hiszen a kör középpontja és egy beírt szabályos hatszög csúcsai 7 olyan pont, amelyek között nem lép fel a kör sugaránál kisebb távolság. Első megoldásunkból azt is kiolvashatjuk, hogy más ilyen ellenpélda nincs.

2) Jelölje a_n a körbe írt szabályos n-szög oldalát. A feladat állítása szerint a körlemezen felvett 8 pont között van kettő, amelynek távolsága a a_6-nál kisebb. Bebizonyítjuk, hogy *a két pont mindig megválasztható úgy is, hogy távolságuk ne legyen a_7-nél nagyobb.* A kör középpontja és egy beírt szabályos hétszög csúcsai mutatják, hogy a tétel állítása ilyen irányban tovább már nem finomítható.

A bizonyítás gondolatmenete második megoldásunkéhoz hasonló, de bizonyos szempontból azzal éppen ellentétes lesz. A kört most 8 tartományra bontjuk fel. Egy beírt szabályos hétszög leghosszabb átlói egy kisebb szabályos hétszöget burkolnak. Ennek csúcsai az eredeti hétszög csúcsaihoz vezető sugarakon helyezkednek el. A felbontást most a kisebb hétszög és a hétszögcsúcsokat összekötő sugárszakaszok szolgáltatják (3. ábra).



3. ábra

Azt állítjuk, hogy a 8 tartomány bármelyikén veszünk is fel két pontot (határpont felvételét is megengedve), ezek távolsága a_7-nél nagyobb nem lehet. Ez a kis hétszög esetében nyilvánvaló, hiszen egy szabályos hétszög pontjai közül egy legnagyobb átló végpontjai vannak egymástól legtávolabbra, és a kis hétszög B_7B_3 átlója az ábra $A_1A_2A_5\triangle$-éből kiolvashatóan kisebb, mint $A_1A_2 = a_7$.

A szektorszerű $A_1A_2B_2B_1$ tartományra térve először is belátjuk, hogy $A_1A_2 = A_2B_1$ (s ugyanígy $= A_1B_2$). Ez abból adódik, hogy az $A_1A_2B_1A_7$ négyszög rombusz, mert szemközti oldalai párhuzamosak és $A_7A_1 = A_1A_2 = a_7$, így tehát az A_1B_1 átló a rombuszból egyenlőszárú háromszöget vág le. Ennek szárszöge a kör egyharmadánál kisebb íven (ti. kéthetedén) nyugvó kerületi szög, ezért $60°$-nál kisebb, s így az egyenlőszárú háromszög A_1B_1 alapja az $A_1A_2 = a_7$ szárnál kisebb.

Ha a szektorszerű tartományban két egymástól maximális távolságra levő pontot keresünk, nyilván csak a határvonal pontjai jöhetnek szóba. A maximális szakasz végpontjai között nem szerepelhet egy határoló szakasz belső pontja, mert valamely pontnak egy szakasz pontjaitól mért távolságai közül a maximális értéket csak végponttól mért távolság adhatja. Nem szerepelhet a maximális szakasz végpontjai között az A_1A_2 körív belső pontja sem, mert a körlemez valamely (a középponttól különböző) pontjának egy körív pontjaitól mért távolságai közül a maximális értéket szintén csak végponttól mért távolság adhatja. Így tehát a keresett maximális szakasz mindkét végpontja csak az A_1, A_2, B_2, B_1 pontok közül való lehet, s e pontok távolságainak maximuma, mint láttuk, valóban a_7.

Tekintsük most már a körlemez megadott 8 pontját. Ha mindannyian a kis hétszögben vannak, akkor bármelyik kettőnek a távolsága kisebb, mint a_7. Ha nem ez a helyzet, forgassuk el a tartományainkat határoló vonalakat a kör középpontja körül úgy, hogy a 8 pont valamelyike elválasztó vonalra essék. Ekkor a tartományok mindegyike tartalmaz a belsejében és a határán valahány pontot (esetleg egyet sem) a 8 pont közül. E számok összege legalább 9 hiszen van olyan pont, amelyet kétszer is figyelembe vettünk. Kell tehát a 8 tartomány között olyannak lennie, amely a határát is hozzászámítva legalább két pontot tartalmaz pontjaink közül. E kettőnek a távolsága azonban a fentiek szerint legfeljebb a_7, s ez állításunk helyességét bizonyítja.