I. megoldás. Be kell bizonyítanunk, hogy a köbgyök alatti kifejezés nem nagyobb a bal oldal köbénél. Felhasználjuk a számtani és a mértani középre vonatkozó ismert egyenlőtlenséget, amely szerint két szám szorzata nem lehet a számtani közepük négyzeténél nagyobb. Ezt kétszer is alkalmazva

$$\begin{aligned}
&\frac{abc+abd+acd+bcd}{4} = \frac{1}{2}\left[ab\frac{c+d}{2} + cd\frac{a+b}{2}\right] \le \\
&\le \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{c+d}{2} + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2\frac{a+b}{2}\right] = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4} \le \\
&\le \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\frac{a-b+c+d}{4} = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.
\end{aligned}$$

Elég most már csak azt igazolnunk, hogy

$$\frac{a+b+c+d}{4} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

Ez abból adódik, hogy a kétoldali kifejezések négyzetének különbsége

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{16}\left[3(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right] = \\
&= \frac{1}{16}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\right] \ge 0.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. A feladat szövegében felesleges az a megszorítás, hogy a, b, c, d pozitív számok. Ezt megoldásunk sem használta fel. Igaz ugyan, hogy hivatkoztunk a számtani és mértani közép egyenlőtlenségére, és mértani középről csak pozitív értékek körében beszélhetünk, viszont pozitív értékekre való szorítkozás nélkül is igaz, hogy két szám szorzata nem lehet a számtani közepük négyzeténél nagyobb.

Megoldásunk az eredetinél erősebb

$$\frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

egyenlőtlenséget bizonyította be. A következő megoldások is ezt igazolják majd.

Megoldásainkban többféle középérték szerepel. A pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok számtani (aritmetikai), mértani (geometriai), harmonikus és négyzetes (kvadratikus) közepét az

$$\begin{aligned}
A(a_1,\ldots,a_n) &= \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n),\\
G(a_1,\ldots,a_n) &= \sqrt[n]{a_1\ldots a_n},\\
H(a_1,\ldots,a_n) &= \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}},\\
Q(a_1,\ldots,a_n) &= \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}
\end{aligned}$$

képletek adják meg. Ezek között sokféle egyenlőtlenség állapítható meg. Két számra vonatkozólag már felhasználtuk a $G \le A$ egyenlőtlenséget. Négy számra vonatkozólag bebizonyítottuk, hogy $A \le Q$. Két számra vonatkozólag közvetlenül ellenőrizhető a

$$G^2 = AH$$

összefüggés, és ebből $G \le A$ felhasználásával $H \le G$, és így $H \le A$ is adódik. Bizonyítás nélkül említjük meg, mert nem lesz szükségünk rá, hogy az itt említett egyenlőtlenségek a szám közepeire is teljesülnek.

II. megoldás. Jelölje A, G, H, Q az a, b, c, d számok megfelelő közepeit. Feladatunk állítása köbreemelés után $Q^3 \ge G^4/H$ alakban írható, s mi a többet mondó $G^4 \le A^3H$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk be.

Jelölje A_1, G_1, H_1 az a, b számok, A_2, G_2, H_2 pedig a c, d számok megfelelő közepeit. Nyomban belátható, hogy ezekre

$$A(A_1,\ A_2) = A, \qquad G(G_1,\ G_2) = G, \qquad H(H_1,\ H_2) = H.$$

Mivel $G_1^2 = A_1H_1$, és hasonló érvényes bármely két szám közepeire,

$$\begin{aligned} G^4 &= G_1^2G_2^2 = A_1H_1 \cdot A_2H_2 = A_1A_2 \cdot H_1H_2 = \\ &= A(A_1, A_2) \cdot H(A_1, A_2) \cdot A(H_1, H_2) \cdot H(H_1, H_2). \end{aligned}$$

Minthogy pedig $H(A_1, A_2) \le A(A_1, A_2)$, és a hasonló $H_1 \le A_1$, $H_2 \le A_2$ egyenlőtlenségekből $A(H_1, H_2) \le A(A_1, A_2)$ következik, a fenti egyenlőségből a bizonyítandó $G^4 \le A^3H$ egyenlőtlenséghez jutunk.

III. megoldás. Felhasználjuk azt, hogy ha négy szám nem egyenlő, akkor van közöttük a számtani közepüknél nagyobb, és van kisebb is. Legyen például $c < A < d$, ahol A ismét az a, b, c, d számok számtani közepét jelöli. Legyen $c_1 = c + d - A$ és $d_1 = A$. Ezekre

$$\begin{aligned} c_1 + d_1 &= c + d, \\ c_1d_1 &= (c + d - A)A = (A - c)(d - A) + cd > cd. \end{aligned}$$

Ha tehát az a, b, c, d számok helyébe az a, b, c_1, d_1 számokat írjuk, számtani közepük változatlanul A marad, viszont A is szerepel közöttük, illetőleg többször szerepel, mint ahányszor szerepelt, és a feladat egyenlőtlenségének jobb oldala

$$ab(c + d) + (a + b)cd < ab(c_1 + d_1) + (a + b)c_1d_1$$

miatt növekszik.

Ha tehát a, b, c, d nem egyenlők, akkor megváltoztathatók úgy, hogy számtani közepük változatlanul A maradjon, A többször szerepeljen közöttük, mint ahányszor szerepelt, s hogy a feladatbeli köbgyök értéke növekedjék. Ezt az eljárást a szükség szerint megismételve mindegyik szám helyébe A lép, s a köbgyök értéke állandóan növekszik. Ha pedig mindegyik szám A-val egyenlő, akkor a köbgyök értéke is A. Eszerint a köbgyök értéke eredetileg is A-nál kisebb vagy esetleg vele egyenlő volt, s ez az, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Ennek a megoldásnak a gondolatmenete változatlanul alkalmazható akkor is, ha nem négy számról és a belőlük képezhető három tényezős szorzatok összegéről, hanem a számról és az ezekből képezhető k tényezős szorzatok összegéről van szó. Így azt kapjuk, hogy ez az összeg nem lehet nagyobb, mint $\binom{n}{k}A^k$.

Kiemeljük ennek az eredménynek azt a speciális esetét, amikor $k = n - 1$. Ebben az esetben a vizsgált összeg nG^n/H. Így tehát a

$$G^n \le A^{n-1}H$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amely $n - 2$ esetén egyenlőség formájában teljesül, $n = 4$ esetén pedig a megoldásainkban bizonyított egyenlőtlenséggel azonos.

Gondolatmenetünk még a $k = n$ esetben is alkalmazható, amikor csak egyetlen szorzatról van szó, s így az n szám közepeire érvényes $G \le A$ egyenlőtlenség bizonyításához jutunk.