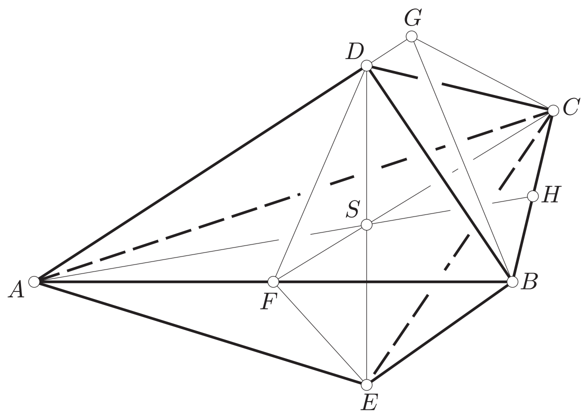
I. megoldás. Ha a szabályos $ABC\triangle$ mentén összeillesztjük az egybevágó $ABCD$, $ABCE$ gúlákat (1. ábra), a D, E csúcsok a háromszög síkjára a háromszög S középpontjában emelt merőlegesen helyezkednek el. Az összeillesztéssel keletkező test eszerint nemcsak az ABC síkra, hanem pl. az ADE síkra is szimmetrikus. E szimmetriákból következik, hogy a D, E csúcsokból az AB élre, valamint a B, C csúcsokból az AD egyenesre bocsátott merőlegesek egyenlők, s hogy közös F és G talppontjuk van. Eszerint a $DFE\sphericalangle$ az AB él mentén, a $BGC\sphericalangle$ pedig az AD él mentén csatlakozó lapok szögét méri. Minthogy e szögek a feltevés szerint egyenlők, a DFE, BGC háromszögek hasonlók, hiszen egyenlő szárúak és szárszögük ugyanakkora.



1. ábra

A hasonlóságból a megfelelő oldalak arányára

$$DE : BC = DF : BG$$

következik. A jobb oldali szakaszok az $ABD\triangle$ magasságai, s ezért fordítva aránylanak, mint a megfelelő oldalak:

$$DF : BG = AD : AB.$$

Minthogy $BC = AB$, az aránypárok egybevetéséből $DE = AD$ következik, tehát az is, hogy az $ADE\triangle$ szabályos, és így hasonló az $ABC\triangle$-höz. Ebből a hasonlóságból az oldalak és magasságok arányára

$$DE : BC = AS : AH$$

adódik. Minthogy az S súlypont harmadolja az AH súlyvonalat, az utolsó arány értéke $2/3$. Ez tehát egyben a $DE : BC$ arány keresett értéke is.

Megjegyzés. Feladatunk abból a feltételezésből indul ki, hogy van olyan test, amelyre a feladat követelménye teljesül, azaz lapszögei mind egyenlők. Rámutatunk itt arra, hogy ez valóban igaz, mégpedig éppen úgy jutunk hozzá, hogy a $DE : BE$ arány értékét a megoldásban talált $2/3$-nak választjuk, azaz a szabályos $ABC\triangle$ középpontjában a háromszög síkjára emelt merőlegesen mindkét irányban a háromszög oldalának harmadát mérjük fel, s az így kapott D, E csúcsok által meghatározott testet tekintjük. Ennek az állításnak a helyessége megoldásunk gondolatmenetének megfordítása útján látható be.

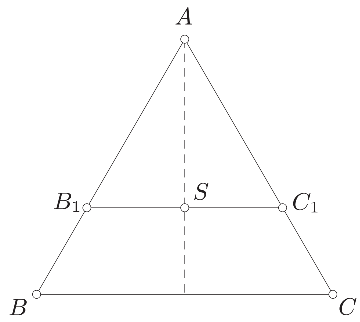
A szerkesztés következménye ugyanis, hogy a megoldásbeli utolsó aránypár teljesül, s ebből következik, hogy az $ADE\triangle$ és $ABC\triangle$ hasonló, hogy tehát az $ADE\triangle$, is szabályos. Eszerint $AD = DE$, és a középső aránypár jobb oldalán álló arány értéke $2/3$. Ennyi tehát a bal oldali arány értéke is, s ezért az első aránypár is helyes. Ebből viszont az egyenlő szárú $DFE\triangle$ és $BGC\triangle$ hasonlósága adódik, s ezek megfelelő szögeinek egyenlősége miatt a szerkesztett test lapszögei valóban egyenlők.

A szóban forgó testhez a legegyszerűbben talán úgy juthatunk el, hogy egy szabályos $ADE\triangle$-et DE oldala körül mindkét irányban $120°$-kal elforgatunk, s az így adódó három háromszög által kifeszített testet tekintjük. Ez közvetlenül adódik a fentiekből.

II. megoldás. Az 1. ábra jelöléseit használjuk, és abból indulunk ki, hogy az összeillesztéssel keletkező test az ABC síkra és az ADE síkra is szimmetrikus. Eszerint ez a két sík az AB élű és az AD élű lapszöget felezi, s e lapszögek feltételezett egyenlősége miatt a két sík mindegyike ugyanakkora lapszöget alkot az ABD síkkal.

Tükrözzünk a $BAD\sphericalangle$ szögfelezőjében a szög síkjára merőlegesen emelt síkra. E tükrözéskor az AB és AD szárak is, s az imént említett lapszögek egyenlősége miatt az ABC és ADE síkok is helyet cserélnek. Ezért AS metszésvonaluk helyben marad, és a szimmetrikus $BAS\sphericalangle$ és $DAS\sphericalangle$ egyenlő. Ha tehát a DE szakaszt az AS tengely körül $90°$-kal elforgatjuk, D és ugyanúgy E az AB és AC élre jut, s ezért DE egyenlő az $ABC\triangle$-et átvágó, AS-re merőleges B_1SC_1 szakasszal (2. ábra). Minthogy pedig S az $ABC\triangle$ súlypontja, s ez A-tól $2/3$-szor akkora távolságra van, mint a BC oldal felezőpontja, a keresett arány

$$DE : BC = B_1C_1 : BC = \frac{2}{3}.$$



2. ábra

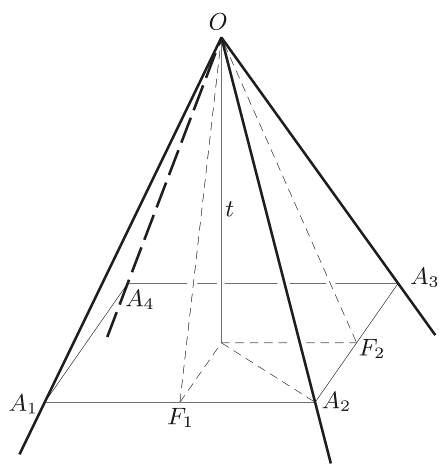
III. megoldás. Tekintsük az összeillesztéssel keletkező bipiramis A csúcsú, négyélű szögletét. Ezt a szögletet négy egyenlő szögtartomány határolja, amelyek a feltevés szerint egyenlő lapszögeket alkotva csatlakoznak egymáshoz. Eszerint ez négyoldalú szabályos szöglet, azaz olyan, mint a négyoldalú szabályos gúla csúcsánál elhelyezkedő, amely a gúla tengelye körül $90°$-kal elforgatva önmagát fedi.

Ha tehát a bipiramis DSE tengelyét az A csúcsú szöglet AS tengelye körül $90°$-kal elforgatjuk, akkor az előző megoldásban említett B_1C_1, szakaszhoz jutunk. Ebből a feladat kérdésére adandó válasz már ugyanúgy következik.

Megjegyzés. Utolsó megoldásunk nemcsak azért rövid, mert az előzőre hivatkozott, hanem azért is, mert a szögletekre vonatkozó ismeretekre támaszkodott. Mielőtt ezeket részleteznők, néhány elnevezést említünk meg.

Tekintsünk egy poliédert, annak egyik csúcsát és mindazokat az ebből a csúcsból kiinduló félegyeneseket, amelyeknek egy kezdőszakasza a poliéderhez tartozik. E félegyenesek pontjai együttesen egy végtelenbe nyúló alakzatot alkotnak, amelyet a poliéder *szögletének* nevezünk. A szöglet legtöbbször végtelenbe nyúló gúla. A szögletet határoló szögtartományok a szöglet *oldalai,* s a csatlakozó oldalak által alkotott lapszögek a szöglet *szögei.*

Egy szöglet akkor *szabályos,* ha minden oldala és minden szöge ugyanakkora. Bebizonyítjuk, hogy a szabályos n-oldalú szögletnek van *tengelye*, amely körül $360°/n$ szöggel elforgatva a szöglet újból ugyanabba a helyzetbe jut. Megoldásunk ezt használta fel az $n = 4$ esetben.



3. ábra

Tekintsük az $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ élű, n-oldalú szabályos szögletet, (3. ábra). Az $A_1OA_2\sphericalangle$ síkjára az OF_1 szögfelező mentén merőleges síkot emelünk. Ezt a síkot az OA_2 élű lapszöget felező sík a t egyenesben metszi. A szabályosság miatt $A_1OA_2\sphericalangle = A_2OA_3\sphericalangle$, s ezért e szögek a lapszögüket felező A_2Ot síkra vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el. Ebből a szimmetriából következik, hogy az F_1Ot sík tükörképe az $A_2OA_3\sphericalangle$ síkját annak OF_2 szögfelezőjében metszi, s hogy OF_1 és OF_2 ugyanakkora szöget zár be a t egyenessel. Ha tehát a szögletet t körül az F_1Ot, F_2Ot síkok hajlásszögével elforgatjuk, akkor az A_1OA_2 oldal fedi az A_2OA_3 oldalt. Minthogy pedig a szabályos szöglet szögei egyenlők, az elforgatott A_2OA_3 oldal az A_3OA_4 síkba kerül, és a szöglet oldalainak egyenlősége miatt az OA_3 él az OA_4 helyzetbe jut. Ugyanígy következtethetünk azonban tovább, és megállapíthatjuk, hogy valamennyi oldal és él a rákövetkezőnek a helyét foglalja el. Ha tehát ezt az elforgatást n-szer megismételjük, mindegyik az n-edik rákövetkezőt, azaz önmagát fedi. Eszerint ez az n-szeres elforgatás $360°$-os, és egy elforgatás valóban ennek n-edrésze.

Ha n páros, legyen $n = 2k$. Ekkor a k-szoros elforgatás $180°$-os, tehát a tengelyre vonatkozó tükrözést jelent. Ebben az esetben kimondhatjuk tehát, hogy a tengely az átellenes élek szögét felezi. Megoldásunk az $n = 4$ esetben ezt is felhasználta.