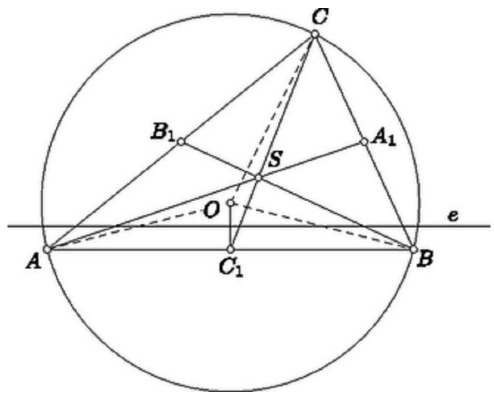
Ha az $ABC\triangle$ nem tompaszögű, akkor (a belsejében vagy a határán) tartalmazza a köréírt kör O középpontját. Ezért az S súlypont által meghatározott SAB, SBC, SCA háromszögek közül legalább az egyik szintén tartalmazza az O pontot. Legyen az $SAB\triangle$ ilyen (4. ábra).



4. ábra

Minthogy az $SAB\triangle$ tartalmazza az $OAB\triangle$-et,

$$SA + SB \geq OA + OB,$$

és az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha O és S azonos. Eszerint az $s_a = AA_1$, $s_b = BB_1$ súlyvonalakra és a körülírt kör r sugarára

$$\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b \geq 2r,$$

vagyis

$$s_a + s_b \geq 3r.$$

Ha O azonos C_1-gyel, akkor nyilván $CO = CC_1$. Ha azonban O nem azonos C_1-gyel, akkor az OC_1 szakaszt merőlegesen felező e egyenes belevág a háromszögbe, tehát a vele párhuzamos AB szakaszt elválasztja a C csúcstól. Eszerint C és O ugyanabban az e egyenes által határolt félsíkban van, s ezért a C pont az e egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő O, C_1 pontok közül O-hoz van közelebb. A $CC_1 = s_c$, és $CO = r$ szakaszokra ezek szerint

$$s_c \geq r$$

mindig teljesül, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha O és C_1 azonos:

Egyenlőtlenségeinket összeadva

$$s_a + s_b + s_c \geq 4r$$

adódik, de itt az egyenlőség soha sem teljesülhet, mert egyszerre nem teljesülhet mind a két összeadott egyenlőtlenségben, hiszen O nem lehet az egymástól különböző S, C_1 pontok mindegyikével azonos.

Megjegyzések. 1. Nem hagyható el a feladatnak az a megszorítása, hogy a háromszög nem tompaszögű. Bármilyen csekély túllépést engednénk is meg, 90° fölé, a feladat állítása már nem volna helyes. Bebizonyítjuk, hogy ez valóban így van.

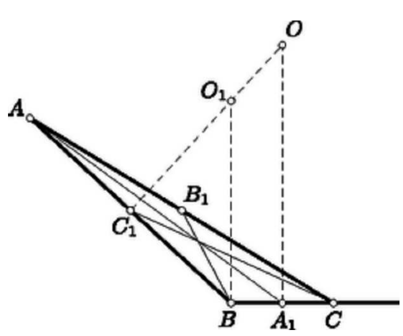
Induljunk ki tehát egy tetszőlegesen megadott $ABC\sphericalangle > 90°$ szögből. Messe az $AB = c$ szakasz felezőmerőlegese a BC szárra B-ben emelt merőlegest az O_1 pontban (5. ábra). A BC száron úgy választjuk meg a C pontot, hogy a $BC = a$ távolságra

$$a + c \leq 2 \cdot BO_1$$

teljesüljön. Az $ABC\triangle$ köré írt kör sugarára

$$r = BO > A_1O > BO_1,$$

hiszen a két utolsó szakasz ugyanannak a szögnek párhuzamos szelője, és BO_1 van a szög csúcsához közelebb.



5. ábra

Az $ABC\triangle$ súlyvonalaira az ABA_1, BC_1B_1, CBC_1 háromszögek egyenlőtlenségei alapján

$$s_a < \frac{a}{2} + c, \quad s_b < \frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \quad s_c < a + \frac{c}{2}.$$

Ezek szerint

$$s_a + s_b + s_c < 2(a + c) < 4 \cdot BO_1 < 4r.$$

2. Bebizonyítjuk, hogy akkor sem volna helyes a feladat állítása, ha benne 4 helyett valamely 4-nél bármi csekéllyel is nagyobb szám állna.

Egy $2d$ alapú, m magasságú egyenlőszárú háromszög (6. ábra) súlyvonalaira az $AA_1D\triangle$-re vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával

$$s_a = s_b < \frac{m}{2} + \frac{3}{2}d, \quad s_c = m,$$
$$s_a + s_b + s_c < 2m + 3d.$$

A körülírt kör sugarára

$$r > \frac{m}{2},$$

hiszen az m magasságot a kör tartalmazza. Ezek szerint

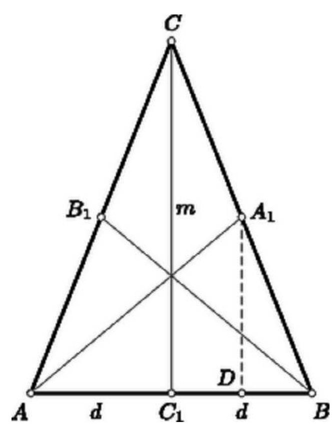
$$s_a + s_b + s_c < \left(4 + 6\frac{d}{m}\right) r.$$

Ha λ egy tetszőleges, 4-nél nagyobb szám, m rögzítése után d megválasztható olyan kicsire, hogy

$$4 + 6\frac{d}{m} < \lambda$$

teljesüljön. Az így adódó háromszögre a fentiek szerint

$$s_a + s_b + s_c < \lambda r.$$



6. ábra

3. A feladat arról szólt, hogy a súlyvonalak összege a körülírt kör sugarának legalább hányszorosa. Bebizonyítjuk most, hogy legfeljebb 4,5-szöröse, és itt a háromszöget illetően semmiféle megszorítást sem teszünk. Szabályos háromszög esetében a vizsgált arány éppen 4,5. Meglepő talán a nem tompaszögű háromszögekre érvényes viszonylag szűk (4, 4,5) értékköz.

Tekintsük a sík egy P pontjának az $ABC\triangle$ csúcsaitól mért távolságait. Ezek számtani közepét $a(P)$, négyzetes középüket pedig $q(P)$ jelöli. Ismeretes, hogy $a(P) \leq q(P)$.

Bizonyításunk arra épül, hogy $q(P) \geq q(S)$. Ha az A, B, C pontokba egységnyi tömegeket helyezünk, akkor $3\left[q(P)\right]^2$ e tömegrendszer tehetetlenségi nyomatéka a síkot a P pontban merőlegesen döfő egyenesre vonatkozólag. Az imént kimondott egyenlőtlenség következik tehát abból, hogy párhuzamos tengelyek közül a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

Egyenlőtlenségünket fizikai ismeretekre való hivatkozás nélkül akarva bebizonyítani bevezetjük az

$$\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{SB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{SC} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{SP} = \mathbf{p}$$

vektorokat (lásd pl. Matematikai Versenytételek, II. rész, 26–30. o. és 69. o.). Felhasználjuk azt, hogy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Az egyenlőtlenségünkben szereplő értékekre

$$\begin{aligned}
3\big[q(S)\big]^2 &= \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2,\\
3\big[q(P)\big]^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{p})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{p})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{p})^2=\\
&=(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\ \mathbf{c}^2)-2\mathbf{p}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+3\mathbf{p}^2=\\
&=3\big[q(S)\big]^2+3\mathbf{p}^2\geq 3\big[q(S)\big]^2.
\end{aligned}$$

Ezzel a $q(P)\geq q(S)$ egyenlőtlenség bizonyítást nyert, de ebből eredeti állításunk is nyomban következik:

$$s_a+s_b+s_c=\frac{9}{2}a(S)\leq\frac{9}{2}q(S)\leq\frac{9}{2}q(O)=\frac{9}{2}r.$$

4. Megemlítjük, de nem részletezzük, hogy a tetraéder súlyvonalainak összege a körülírt gömb sugarának legfeljebb 16/3-szorosa, s hogy ez ugyanúgy bizonyítható, ahogyan a megfelelő síkbeli állítást éppen bebizonyítottuk. Ha feladatunk állításának térbeli megfelelőjét keressük, valamilyen megszorítást kell tennünk a tetraéderre vonatkozólag, annak megfelelően, hogy a feladat csak nem tompaszögű háromszögekről szólt. Azok a háromszögek nem tompaszögűek, amelyek tartalmazzák a köréjük írt kör középpontját. Érthető tehát, hogy azokról a tetraéderekről szólunk, amelyek tartalmazzák a köréjük írt gömb középpontját, azonban csak bizonyítás nélkül említjük meg, hogy az ilyen tetraéderek súlyvonalainak összege a körülírt gömb sugarának 4-szeresénél nagyobb, és itt 4 helyébe nagyobb számot írva már helytelen állításhoz jutunk.