I. megoldás. A baloldali szorzat

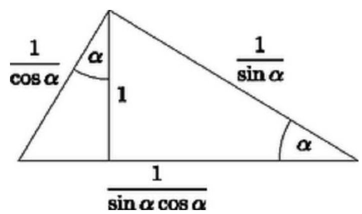
$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

alakban írható, hiszen $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$. Minthogy egy szög szinusza és koszinusza 1-nél nagyobb nem lehet, a felírt összeg második és harmadik tagja legalább 1, utolsó tagja pedig legalább 2. A teljes összeg értéke tehát legalább 5. Az összeg azonban nem lehet 5, mert a két középső tag nem lehet egyszerre 1, hiszen $\sin\alpha=1$ és $\cos\alpha=1$ egyszerre nem teljesülhet. Az összeg értéke eszerint 5-nél nagyobb.

II. megoldás. Egy α szögű 1 magasságú derékszögű háromszöget tekintünk (2. ábra) A szögfüggvények értelmezéséből következik, hogy e háromszög befogói és átfogója

$$a=\frac{1}{\cos\alpha}\,,\quad b=\frac{1}{\sin\alpha}\,,\quad c=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\,.$$

Feladatunk $a+b+c>4$ bizonyítását kívánja. Ez nyomban következik abból, hogy $a+b>c$ és $c\ge 2$, hiszen a derékszögű háromszög magassága az átfogónak legfeljebb a fele, amint ez a Thales-kör szemléletéből is nyomban adódik.



2. ábra

III. megoldás. A feladat állításán túlmenően bebizonyítjuk, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\ge 3+2\sqrt{2}=5{,}828\ldots,$$

s hogy egyenlőség csak az $\alpha=45^\circ$ esetben következik be. Ennek igazolásához az I. megoldásra hivatkozva elég belátnunk, hogy

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\ge 2\sqrt{2}\,,$$

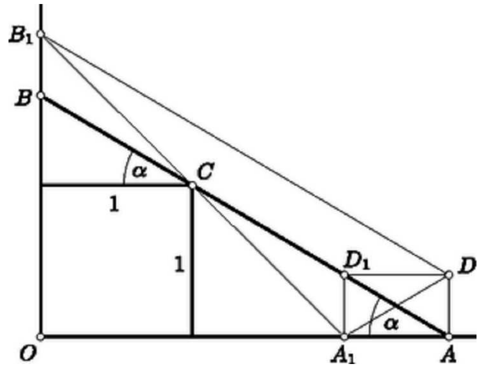
s hogy itt is csak $\alpha=45^\circ$ esetén következik be az egyenlőség. Ezt háromféleképpen bizonyítjuk be.

a) Az előző megoldás jelöléseit használva $a+b\ge 2\sqrt{2}$ a bizonyítandó állítás. Ez abból adódik, hogy

$$(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab=c^2+2cm\ge 8.$$

Felhasználtuk itt Pythagoras tételét, a terület kétféle kifejezése alapján adódó $ab=cm$ összefüggést és az $m=1$ esetben érvényes $c\ge 2$ egyenlőtlenséget. Egyenlőség eszerint csak $c=2m$ esetén, azaz egyenlőszárú derékszögű háromszögre következik be.

b) Forgassuk el a 2. ábrában a magasságtól balra elhelyezkedő háromszöget felső csúcsa körül pozitív irányban 90°-kal. Így a 3. ábra vastagon megrajzolt részéhez jutunk. A bizonyítandó állítás szerint az AB szakasz hosszabb, mint a 45°-kal hajló A_1B_1 szakasz, hiszen ennek hossza $2\sqrt{2}$. Azt kell tehát igazolnunk, hogy a derékszögű $AOB\sphericalangle$ szárait összekötő s a C ponton áthaladó szakaszok közül a szimmetrikusan elhelyezkedő A_1B_1 szakasz a legrövidebb.



3. ábra

Minthogy az OA és OB szár között nincs szerepkülönbség, feltehetjük, hogy a $\alpha < 45°$. A B pont C-re vonatkozó tükörképét D_1-gyel jelöljük. A C-re vonatkozó szimmetria miatt a BB_1, A_1D_1 szakaszok párhuzamosak és egyenlők. A velük párhuzamos és egyenlő AD szakasz a $BADB_1$ parallelogrammához és az A_1ADD_1 téglalaphoz vezet. Az utóbbiból kiolvasható, hogy $AA_1D\sphericalangle = A_1AD_1\sphericalangle = \alpha$, és így $B_1A_1D\sphericalangle = 135° - \alpha > 90°$. Eszerint a $B_1A_1D\triangle$-ben DB_1 a legnagyobb oldal, tehát $A_1B_1 < DB_1 = AB$.

c) Felhasználjuk, hogy a pozitív x, y számok $a(x,y)$ számtani, $g(x,y)$ mér-tani és $q(x,y)$ négyzetes közepére

$$g(x,y) \leq a(x,y) \leq q(x,y),$$

s hogy egyenlőség mindkét esetben csak $x = y$ esetén teljesül. Eszerint

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = 2a\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 2g\left(\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\cos\alpha}\right) = $$
$$= \frac{2}{g(\sin\alpha, \cos\alpha)} \geq \frac{2}{q(\sin\alpha, \cos\alpha)} = 2\sqrt{2}.$$

Egyenlőség csak $\sin\alpha = \cos\alpha$, tehát $\alpha = 45°$ esetén áll fenn.

Megjegyzés. A feladatban α hegyesszöget jelentett. Erre a megszorításra azért volt szükség, mert ha $90° < \alpha < 180°$ vagy $270° < \alpha < 360°$, akkor a feladat egyenlőtlenségének a baloldalán csak az egyik tényező pozitív, s a szorzat negatív. Ha viszont $180° < \alpha < 270°$, akkor mindkét tényező negatív, de szorzatuk 1-nél kisebb. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk.