Nevezzük egyszerűség kedvéért az a magasságú tanulót a-nak, a b magasságút b-nek, stb. Tekintsük a sorát és b oszlopát. E sor és oszlop kereszteződésében elhelyezkedő széken is ül egy tanuló. Ennek magasságát c-vel jelöljük.

Számolunk azzal a lehetőséggel, hogy a, b, c nem mind különbözők. Ha ugyanis a és b egy sorban ül, akkor c azonos b-vel. Ha a és b egy oszlopban ül, akkor c és a azonos. Ha pedig a azonos b-vel, akkor c is azonos velük.

Minthogy a és c egy sorban ül, és a a sorában a legkisebb, c-nél sem lehet nagyobb, azaz $a \leq c$. Ugyanígy adódik, hogy $c \leq b$, hiszen c és b egy oszlopban ül, és b az oszlopában a legnagyobb. Ezek szerint $a \leq c \leq b$, tehát $a \leq b$, vagyis: az $a > b$ eset nem következhetik be.

Az $a = b$ eset bekövetkezik, ha pl. az utolsó sorba a legnagyobb tanulókat ültetjük. Ekkor az utolsó sorban ülők legkisebbike egyaránt betölti a és b szerepét, mert egyrészt a sorában nincs nála kisebb, de minden más sorban van, másrészt az oszlopában nincs nála nagyobb, de minden más oszlopban van.

Az $a < b$ eset bekövetkezik, ha pl. az előző elrendezésből indulunk ki, de az utolsó sor legkisebb tanulója helyet cserél az oszlopában ülő valamelyik másik tanulóval. Az előreültetett tanuló a helycsere után is változatlanul betölti b szerepét, hiszen oszlopában nincs nála nagyobb, de minden más oszlopban van. Minthogy azonban az előreültetett tanuló új sorának minden más tanulója nála kisebb, a keresésekor ő még az egyes sorokból kiszemelt legkisebbek között sem szerepel, s így a szerepét nem ő tölti be.

Megjegyzés. 1. A feladat $p > 1$, $q > 1$ megszorítását kihasználtuk akkor, amikor ugyanabban az oszlopban ülő másik tanulóról, s amikor ugyanabban a sorban ülő minden más tanulóról szóltunk. A megszorításra szükség van, mert ha a székek egyetlen sorban vagy egyetlen oszlopban helyezkednek el, akkor nyilván a legkisebb, illetőleg a legnagyobb tölti be egyszerre a és b szerepét. Ilyenkor tehát csak az $a = b$ eset valósulhat meg.

2. Felvetjük a kérdést, hogy minden tanuló számolhat-e azzal a lehetőséggel, hogy a szerepét majd ő tölti be. Ugyanezt kérdezzük a b szerepet illetően is. Azt állítjuk, hogy a legkisebb $p-1$ tanuló és a legnagyobb $q-1$ tanuló egyik szerep betöltésekor sem jöhet szóba.

a esetében ez abból következik, hogy a a saját sorának legkisebbike, tehát a sorában van $q-1$ nála nagyobb tanuló, viszont minden más sorban van a-nál kisebb, azaz van legalább $p-1$ nála kisebb tanuló. Hasonlóan okoskodhatunk b esetében is, mert a saját oszlopában $p-1$ nála kisebb tanuló ül, és minden más oszlopban van nála nagyobb, azaz legalább $q-1$ nála nagyobb tanuló van.

Ha tehát a tanulókat a legkisebbtől kezdve megszámozzuk, akkor csak a

$$p,\ p+1,\ p+2,\ \ldots,\ pq-q+1$$

sorszámú tanulók tölthetik be az a, b szerepeket.

3. Eddigi megállapításaink bizonyos korlátozásokat tartalmaztak. Azt kérdezzük most, hogy ezeket a korlátozásokat figyelembe véve minden eset megvalósulhat-e. Pontosabban szólva a következő kérdést vetjük fel: A tanár a teremben elhelyezkedő székek egyikére a jelet, egy másikra vagy esetleg ugyanarra b jelet tesz; ezután a folyosón gyülekező tanulókat nagyság szerint sorba állítja, és a p, $p+1$, …, $pq-q+1$ sorszámu tanulók közül kijelöl egyet vagy kettőt aszerint, hogy a teremben ugyanarra a székre tette-e az a és a b jelet, vagy sem, mégpedig abban az esetben, amikor a megjelölt székek nincsenek sem egy sorban, sem egy oszlopban, akkor két olyan tanulót jelöl ki, akik a nagyság szerinti sorban nem állnak egymás mellett; kérdés, hogy elhelyezhetők-e a tanulók a teremben úgy, hogy a megjelölt székekre a kijelölt tanulók üljenek, mégpedig, ha ketten vannak, akkor a kisebbikük üljön az a jelű székre, s hogy a és b szerepét éppen az a és b jelű széken ülő tanuló töltse be.

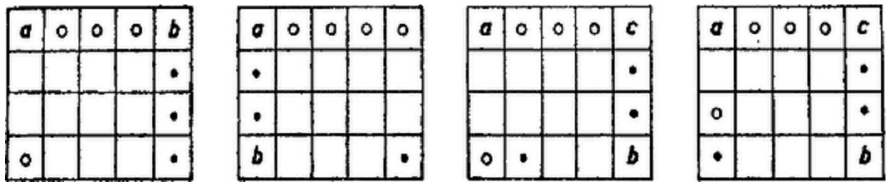
Azt állítjuk, hogy ez mindig lehetséges. Meg kell említenünk, hogyha a megjelölt székek nincsenek sem egy sorban, sem egy oszlopban, akkor megoldásunk értelmében szerepelnie kell egy a-nál nagyobb és b-nél kisebb c tanulónak, s ezért a és b a nagyság szerinti sorban nem állhattak egymás mellett. Ez az eset természetesen csak akkor valósítható meg, ha a p, $p+1$, …, $pq-q+1$ sorszámú tanulók száma 2-nél nagyobb, azaz

$$pq-p-q+2 > 2,$$
$$(p-1)(q-1) > 1,$$

vagyis ilyenkor a p, q értékek között kell 2-nél nagyobbnak lennie. Eszerint bizonyos kivételt jelent a $p = q = 2$ eset, mert ekkor a 4 szék közül nem szabad két átlósan elhelyezkedőt megjelölni. Ha ugyanis a tanár így járna el, akkor nem tudna a folyosón az előírást betartva kijelölni két tanulót.

Állításunk bizonyítása érdekében először is azt említjük meg, hogy a teremben a sorokat is és az oszlopokat is szabadon felcserélhetjük a rajtuk ülőkkel együtt; ez nem változtat azon, hogy ki tölti be az a, b szerepeket. Ezért nem jelent megszorítást, ha csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor az a jelű szék az utolsó sor bal szélén áll, a b jelű szék pedig az első vagy az utolsó sor valamelyik szélső széke. Nevezzük a $p-1$ legkisebb tanulót „kicsinek”, a $q-1$ legnagyobb tanulót pedig „nagynak”.

Ha a b jel is az utolsó sor bal szélső székére került, akkor a kijelölt egyetlen tanulót erre a székre ültetjük, az utolsó sor többi székére a nagyokat, a bal szélső oszlop többi székére a kicsiket, a még el nem foglalt székekre pedig a többi tanulót ültetjük. Ilyenkor valóban az egyetlen kijelölt tanuló jut az a, b szerepek mindegyikéhez.



1. ábra

A többi esetben ábrán mutatunk be a követelményt kielégítő elrendezést (1. ábra). Az ábra a $p = 4$, $q = 5$ esetre készült, de módszere minden $p > 1$, $q > 1$ esetben alkalmazható. A kicsik helyét pont, a nagyok helyét kör jelöli. Az ábrán meg nem jelölt helyeken a többi tanuló tetszés szerint helyezkedhetik el. Ha a és b átellenes sarkokban van, akkor c olyan tanulót jelöl, akit a nagyság szerinti sorban a és b közrefog. Erre az esetre ábránk két elrendezést mutat be. Az első akkor alkalmazható, ha $q > 2$, a második pedig akkor, ha $p > 2$. Könnyű ellenőrizni, hogy a követelmények minden esetben teljesülnek.