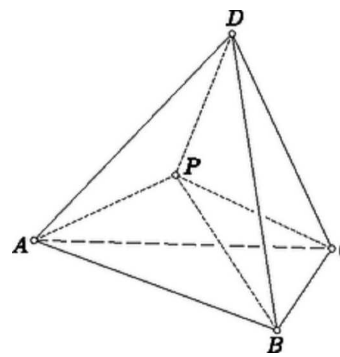
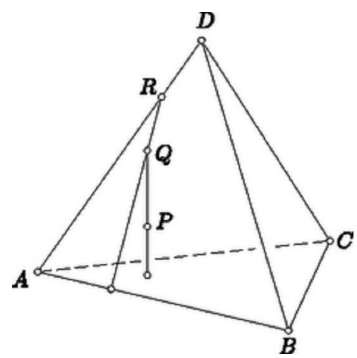
I. megoldás. Feltehetjük, hogy P nincs a DA, DB, DC oldaléleken, mert ha pl. a DA élnek D-től különböző pontja, akkor $PA < DA$.

Elég megmutatnunk, hogy az APD, BPD, CPD háromszögek valamelyike P-nél derékszögű vagy tompaszögű. Ha ugyanis pl. az $APD\Delta$ ilyen, akkor DA a legnagyobb oldala, s ezért $PA < DA$ (10. ábra).



10. ábra

P-ből induló, PD-vel hegyesszöget bezáró félegyenesek annak a féltérnek a belsejében haladnak, amelyet a P-ben PD-re merőlegesen állított sík határol, s amely tartalmazza a D pontot. Ha tehát az előbb említett háromszögek P-nél mindannyian hegyesszögűek, akkor a gúla minden csúcsa a mondott féltér belsejében van, tehát maga a gúla is, s ez ellentmond annak, hogy P a féltér határsíkján helyezkedik el. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy háromszögeink között valóban van olyan, amely P-nél nem hegyesszögű.



11. ábra

II. megoldás. A P ponton át az ABC síkra merőlegest állítunk. Legyen Q ennek a merőlegesnek az ABC síktól legtávolabbi, még a gúlához tartozó pontja (11. ábra). Q tehát az ABD, ACD, BCD oldallapokon helyezkedik el, legyen pl. az ABD lapon. Állítsunk ennek síkjában a Q ponton át merőlegest az AB egyenesre. Legyen R ennek a merőlegesnek az AB egyenestől legtávolabbi, még az ABD háromszöghöz tartozó pontja. R tehát az AD, BD oldaléleken helyezkedik el, legyen pl. az AD szakasznak pontja.

Ha egy pontot merőlegesen távolítunk egy síktól vagy egy egyenestől, akkor a sík minden pontjától, illetőleg az egyenes minden pontjától távolodik. Ezért

$$PA \leq QA \leq RA \leq DA.$$

Mindenütt meg kellett engednünk az egyenlőséget is, hiszen $P = Q$, $Q = R$, $R = D$ mindegyike lehetséges. Mindezek azonban egyszerre nem teljesülhetnek, mert P nem azonos D-vel. Ezért legalább egy helyen az egyenlőtlenség jele érvényes, és így $PA < DA$.

III. megoldás. A PD szakaszt merőlegesen felező sík kettévágja gúlánkat, hiszen P és D a sík más-más oldalán van, és a gúlához tartozik. Ebből következik, hogy e sík által határolt félterek mindegyikének a belsejében van csúcsa a gúlának, mert ha az egyikben nincs, akkor a csúcsaival együtt az egész gúla is a másik féltérben van, s így a sík nem vághatná ketté a gúlát. Ha pl. az A csúcs a P pontot tartalmazó féltér belsejében van, akkor $PA < DA$, hiszen e féltér belső pontjai közelebb vannak P-hez, mint D-hez.

Megjegyzések. 1. Mindhárom megoldásunk a feladat állításán túlmenően azt is bebizonyítja, hogy a PA, PB, PC távolságok között van olyan, amely kisebb, mint a DA, DB, DC távolságok közül a vele azonos végpontú.

2. A második megoldás változtatás nélkül alkalmazható akkor is, ha nem három, hanem akárhány oldalú gúláról van szó. Bizonyítja tehát, hogy *egy gúlának a csúcsától különböző (belsejében vagy határán elhelyezkedő) pontja közelebb van az alaplap valamelyik szögpontjához, mint a gúla csúcsa.*

3. A harmadik megoldás alapján még többet is kimondhatunk. Módosítás nélkül helyes marad ez a megoldás akkor is, ha benne gúla helyett tetszőleges poliéder szerepel. Bebizonyítja tehát, hogy *egy poliéder valamely D csúcsától*

különböző (belsejében vagy határán elhelyezkedő) pont közelebb van a poliéder valamelyik D-től különböző csúcsához, mint D. Ugyanez az első bizonyítás módszerével is könnyen bizonyítható.

4. Legyenek a háromoldalú gúla oldalélei $d_1 \le d_2 \le d_3$, egy a gúla csúcsától különböző pontjának az alapháromszög csúcsaitól mért távolságai pedig $p_1 \le p_2 \le p_3$. Az indexezés itt csak a nagyságrendtől függ, és nem jelenti, hogy az azonos indexűeket azonos végpontú szakaszok adják. Kérdezhetjük, hogy ha megadunk valamilyen d_1, d_2, d_3, p_1, p_2, p_3 távolságokat, vajon található-e olyan gúla s abban olyan pont, amelyekhez éppen a megadott értékek tartoznak.

Feladatunk kimondja, hogy

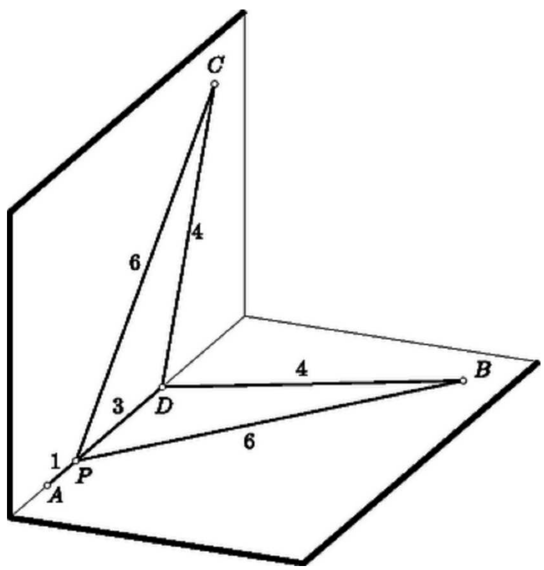
$$p_1 < d_3$$

szükséges ahhoz, hogy ez lehetséges legyen. A második megoldásból könnyen kiolvasható, hogy

$$p_1 + p_2 < d_2 + d_3$$

is szükséges feltétel, hiszen ott $PA + PB \le QA + QB \le DA + DB$, és az egyenlőség nem teljesülhet mind a két esetben.

Érdemes megemlíteni, hogy pl. $p_2 < d_3$ már nem kell, hogy teljesüljön, és nem kell teljesülnie a $p_1 + p_2 + p_3 < d_1 + d_2 + d_3$ egyenlőtlenségnek sem. Mindez kiolvasható a 12. ábrából, amelyen a szakaszok mellett azok hossza áll. Ezek a tapasztalatok további szükséges feltételek keresésekor óvatosságra intenek.



12. ábra

Vannak azonban még további szükséges feltételek is, mert ha a már említettek mind teljesülnek, ez még nem elégséges ahhoz, hogy valóban található legyen a d_1, d_2, d_3, p_1, p_2, p_3 értékeket szolgáltató gúla és pont. Ilyen egyszerű formájú szükséges és elégséges feltétel nem ismeretes. Megkeresése talán érdekes, de nagyon könnyűnek nem látszó feladat.