Megjegyzések. 1. A feladat szövegének zárójelbe foglalt kiegészítése más szóval azt jelenti, hogy nem olyan u, v számpárok számát vizsgáljuk, amelyekben a két szám sorrendje közömbös, hanem az u, v *rendezett* számpárokét, hogy tehát az összeszámláláskor két számpár csak akkor tekintendő azonosnak, ha bennük az első számok és a második számok is egyenlők.

2. A feladat alábbi megoldásaiban használjuk a következő, általánosan is használt jelöléseket: természetes számok körében $(a,\ b)$ az a, b számok legnagyobb közös osztóját, $[a,b]$ a legkisebb közös többszörösüket, $a|b$ pedig azt jelöli, hogy a osztója b-nek.

I. megoldás. Legyen n törzstényezős felbontása

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_s^{a_s},$$

ahol $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_s$ különböző törzsszámok, $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$ pedig nem-negatív egész számok. Minthogy a vizsgált számpárokra $[u,\ v]=n$, az u, v számok törzstényezői is csak a $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_s$ törzsszámok közül valók lehetnek.

Vizsgáljuk meg, hogy pl. p_1 mekkora kitevővel szerepelhet u-ban és v-ben. E két kitevő között $[u,\ v]=n$ miatt a_1-nek is szerepelnie kell, és egyik sem lehet a_1-nél nagyobb. Ez háromféleképpen következhetik be: 1. p_1 kitevője mindkét helyen a_1, ez 1 lehetőség; 2. p_1 kitevője u-ban a_1, v-ben viszont kisebb, tehát a $0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ a_1-1$ számok valamelyike, ami a_1 lehetőséget jelent; 3. p_1 kitevője v-ben a_1 és u-ban kisebb, ami ismét a_1 lehetőséget ad. Az összes lehetőségek száma ezek szerint $2a_1+1$.

Hasonlót mondhatunk a többi törzstényezőről is. Minthogy pl. p_1 kitevőinek rögzítése után a többi kitevő számára ugyanazok a lehetőségek maradnak meg, a vizsgált u, v számpárok száma az egyes törzstényezőkre számba vett lehetőségek szorzata:

$$(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_s+1).$$

Meg kell még mutatnunk, hogy n^2 osztóinak száma ugyanennyi. Ez nyomban belátható abból, hogy

$$n^2=p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\dots p_s^{2a_s}$$

osztóiban pl. p_1 kitevője $0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 2a_1$ lehet, azaz $2a_1+1$ lehetőség van, s hogy az így adódó lehetőségek számát ismét össze kell szorozni, hiszen az egyes törzstényezőkre vonatkozó lehetőségek egymástól ismét függetlenek.

Megjegyzés. Megoldásunkban az a kitevő $2a+1$ lehetőséghez vezetett. Ehhez az értékhez a következő, bonyolultabb módon is eljuthatunk:

Az u-ban és v-ben szereplő kitevők egyike sem nagyobb a-nál, azaz mindkettő a $0,1,2,\dots,a$ értékek valamelyike. Eszerint $a+1$ lehetőség adódik mindegyik megválasztására, és $(a+1)^2$ lehetőség a kitevőpár számára. E lehetőségek közül azonban csak azok felelnek meg, amelyekben legalább egyszer maga az a érték is szerepel. Ki kell tehát zárnunk azokat az eseteket, amelyekben mindkét kitevő a $0,\ 1,\ 2,\dots,a-1$ számok közül való. Ez összesen a^2 lehetőség kirekesztését jelenti, s ezért a tényleges lehetőségek száma $(a+1)^2-a^2=2a+1$.

Ez a bonyolultabb út azért tanulságos, mert magyarázat nélkül érthetővé teszi, hogy ha az u, v számpár helyett olyan $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_k$ számsorozatok számát keressük, amelyekben szereplő számok legkisebb közös többszöröse n, akkor feleletül

$$\left[(a_1+1)^k-a_1^k\right]\left[(a_2+1)^k-a_2^k\right]\dots\left[(a_s+1)^k-a_s^k\right]$$

adódik.

II. megoldás. A feladat állítását azáltal bizonyítjuk, hogy a vizsgált u, v rendezett számpárok és n^2 osztói között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesítünk. Az u, v számpárhoz azt a d számot rendeljük hozzá, amelyre

(1) $$\frac{u}{v}=\frac{d}{n}.$$

Ez a d valóban egész szám, mert $[u,\ v]=n$ miatt $v|n$, s így a baloldali törtet egész számmal kell bővíteni, hogy a jobboldali alakot vegye fel. Ez azt is mutatja, hogy d valóban n^2 osztója, hiszen az u számlálót n egy másik osztójával ti. n/v-vel szorozva adódik.

Fel fogjuk használni, hogy ha $u_1:v_1=u_2:v_2$, akkor

(2) $$u_1:u_2=v_1:v_2=[u_1,v_1]:[u_2,v_2].$$

Két szám legkisebb közös többszörösének keresésekor ugyanis két olyan, lehetőleg kicsiny egész számot kell keresnünk, amelyekkel az egyiket és a másikat megszorozva ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Ezeknek az egész számoknak a megválasztása eszerint csak a megadott két szám arányától függ. Ha tehát az u_1, v_1 számpárról az ugyanolyan arányú u_2, v_2 számpárra térünk át, akkor – miként állítottuk – a legkisebb közös többszörös is velük arányosan változik meg.

Bebizonyítjuk most, hogy különböző u_1, v_1 és u_2, v_2 számpárokhoz nem tartozhat ugyanaz a d szám. Ha ez így volna, akkor rájuk

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{d}{n}$$

s ennek következtében (2) is teljesülne. Minthogy pedig $[u_1,\ v_1]=[u_2,\ v_2]=n$, (2) szerint $u_1=u_2$ és $v_1=v_2$ adódik, ami állításunk helyességét bizonyítja.

Be kell még bizonyítanunk, hogy n^2 minden d osztója szerepel az u, v számpárokhoz tartozó számok között. Ennek bizonyítása végett a d/n törtet redukált

$$\frac{d}{n}=\frac{p}{q}$$

alakra hozzuk, ahol tehát $(p,\ q)=1$. Elég bebizonyítanunk, hogy $[p,\ q]|n$, mert akkor (2) szerint a p/q tört olyan u/v törtté bővíthető, amelyre az $[u,\ v]=n$ feltétel is teljesül.

Eszerint már csak $p|n$ és $q|n$ bizonyítása a feladatunk. Az utóbbi nyilvánvalóan helyes, hiszen q egy n nevezőjű tört egyszerűsítése után lépett fel nevezőként. A p-re vonatkozó állítás

$$\frac{n^2}{d}=\frac{nq}{p}$$

következménye, mert itt a baloldalon egész szám áll, ezért a jobboldalon is, azaz $p|nq$. Minthogy pedig $(p,q)=1$, eredményünkből $p|n$ is következik.

III. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan okoskodunk és ugyanúgy indulunk el. A vizsgált számpárokhoz ismét (1) előírásával rendeljük hozzá n^2 egy-egy osztóját.

(1)-ből (2)-re hivatkozva

$$u:d=v:n=n:[d,\ n] \tag{3}$$

következik, hiszen $[u,\ v]=n$. Eszerint d ismeretében u és v már meghatározható:

$$u=\frac{dn}{[d,\ n]},\qquad v=\frac{n^2}{[d,\ n]} \tag{4}$$

n^2 valamely d osztója tehát csak ehhez az egyetlen u, v számpárhoz tartozhat hozzá.

Ha $d|n^2$, akkor (4) egész számokat szolgáltat, hiszen dn és n^2 egyaránt közös többszöröse a d, n számoknak, ezért legkisebb közös többszörösük egészszámszorosa. Ha tehát n^2 valamely d osztójából kiindulva (4) előírásával az u, v számpárt képezzük, olyan egész számokat kapunk, amelyekre a (4)-gyel egyenértékű (3) is teljesül, ami csak $[u,\ v]=n$ esetén következhetik be. Ezek szerint n^2 minden osztója szerepel az u, v számpárjainkhoz rendelt számok között.