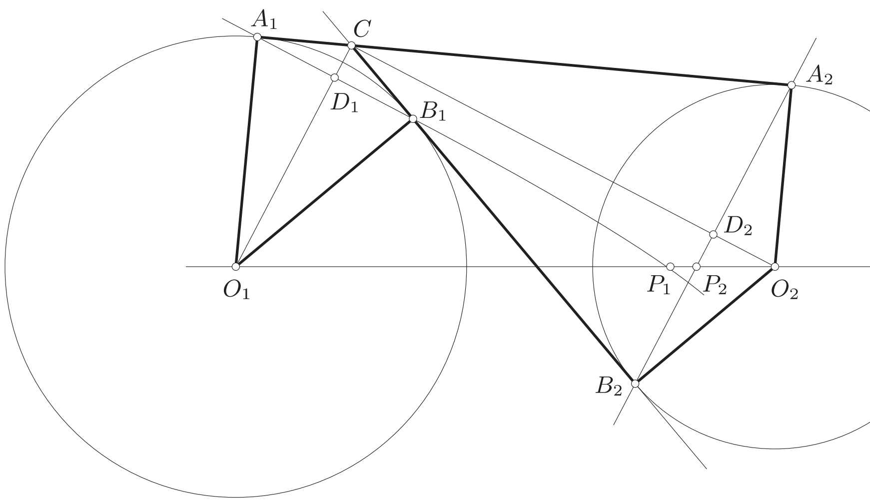
I. megoldás. Az O_1, O_2 középpontú körök A_1A_2 külső és B_1B_2 belső érintőjének metszéspontját C-vel jelöljük (5. ábra). Az $O_1A_1CB_1$ és $CA_2O_2B_2$ derékszögű deltoidok egymáshoz hasonlók, hiszen C-nél elhelyezkedő szögeik mellékszögek, s ebből következik, hogy szögeik páronként egyenlők. Deltoidok körében ez a hasonlóságot valóban biztosítja. A deltoidok CO_1, CO_2 átlói merőlegesek egymásra, mert az említett mellékszögek szögfelezői. Minthogy az A_1B_1, A_2B_2 átlók mindegyike merőleges a CO_1, CO_2 átlók egyikére (az ugyanazon deltoidbeli átlóra), mindegyikük párhuzamos a másikkal.

Messék az A_1B_1, A_2B_2 egyenesek az O_1O_2 centrálist a P_1, P_2 pontokban. Bebizonyítjuk, hogy ez a két pont azonos, hogy tehát az A_1B_1, A_2B_2 egyenesek metszéspontja valóban a centrálison van. Az 5. ábra szándékosan torz, hogy rajta okoskodásunkat jobban követhessük. Elmondhatjuk, hogy a következőkben ábránk torz voltát bizonyítjuk be.



5. ábra

A deltoidok hasonlóságából következik, hogy átlóik D_1, D_2 metszéspontjára

$$O_1D_1 : O_1C = CD_2 : CO_2.$$

A párhuzamos szelők tétele szerint a $CO_1O_2\sphericalangle$ szárait metsző A_1B_1, CO_2 párhuzamosokra

$$O_1D_1 : O_1C = O_1P_1 : O_1O_2,$$

és a $CO_2O_1\sphericalangle$ szárait metsző A_2B_2, CO_1 párhuzamosokra

$$CD_2 : CO_2 = O_1P_2 : O_1O_2.$$

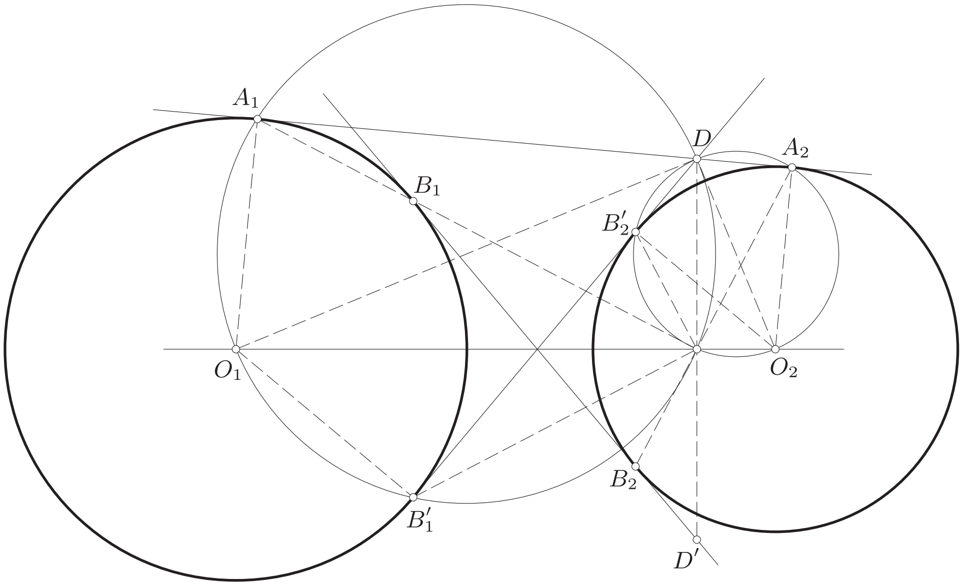
Aránypárjaink egybevetéséből következik, hogy

$$O_1P_1 : O_1O_2 = O_1P_2 : O_1O_2,$$

hogy tehát $O_1P_1 = O_1P_2$, azaz P_1 és P_2 egymással azonos pontok.

II. megoldás. A feladatban előforduló két érintőn kívül a másik $B_1'B_2'$ érintőt is meghúzzuk. Ez az A_1A_2 külső érintőt a D pontban metszi, D-nek a centrálisra vetett vetületét M-mel, a centrálisra vonatkozó tükörképét pedig D'-vel jelöljük (6. ábra). Bebizonyítjuk, hogy M rajta van az A_1B_1, A_2B_2 egyenesek mindegyikén, és ezzel a feladat állítását igazoljuk.

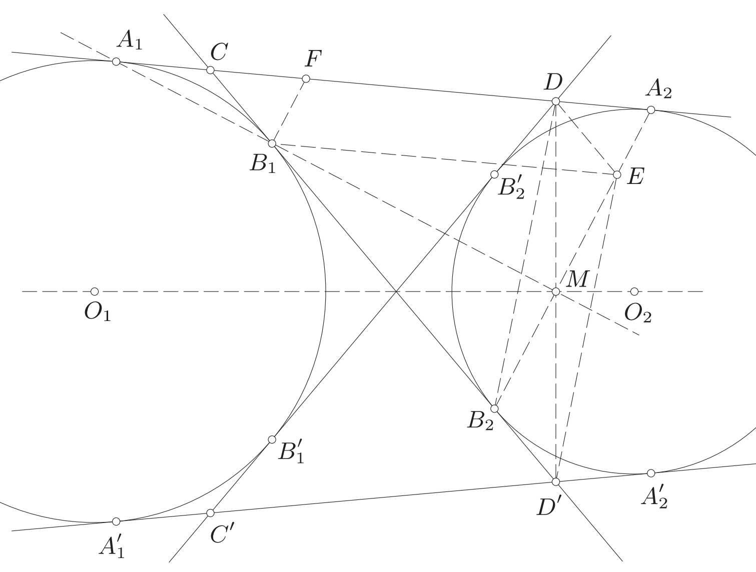
Az O_2D átmérőjű kör tartalmazza az A_2, B_2', M pontokat, mert az O_2D szakasz ezekből a pontokból derékszögben látható. Minthogy $A_2O_2D\sphericalangle = DO_2B_2'\sphericalangle$, a kerületi szögek tétele szerint $A_2MD\sphericalangle = DMB_2'\sphericalangle$. Ebből a szimmetria révén $A_2MD\sphericalangle = D'MB_2\sphericalangle$ következik, tehát az is, hogy az A_2, M, B_2 pontok egy egyenesen vannak.



6. ábra

Hasonlóan okoskodhatunk a másik esetben is. Az O_1D átmérőjű kör tartalmazza az A_1, B_1', M pontokat, mert az O_1D szakasz ezekből derékszögben látszik. Minthogy $A_1DO\sphericalangle = O_1DB_1'\sphericalangle$, a kerületi szögek tétele szerint $A_1MO_1\sphericalangle = O_1MB_1'\sphericalangle$. Ebből a szimmetria révén következik, hogy $A_1MO_1\sphericalangle = B_1MO_1\sphericalangle$, hogy tehát az A_1, B_1, M pontok egy egyenesen vannak.

III. megoldás. Felhasználjuk azt, hogy ha két kör külső és belső érintőjének metszéspontját az egyik érintőn a hozzá legközelebb eső érintési ponttal összekötjük, mindig ugyanakkora szakaszhoz jutunk, bármely érintőpár metszéspontjából indultunk is ki. A 7. ábrán tehát $CB_1 = DA_2 = D'B_2$.



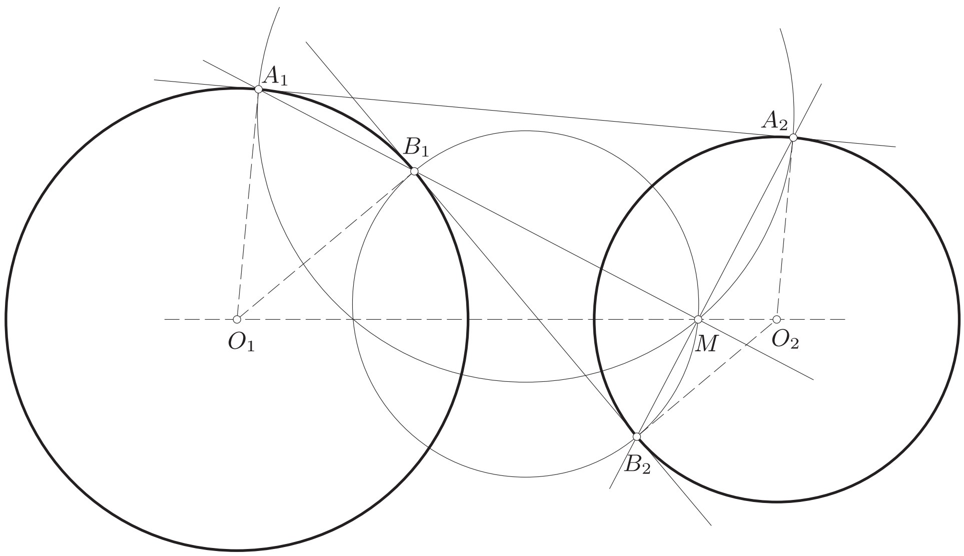
7. ábra

Abból indulunk ki, hogy az A_1B_1, A_2B_2 egyenesek egymásra merőlegesek. Ezt az első megoldás mintájára láthatjuk be. Az egyenlőszárú $A_2B_2C\triangle$-ből az A_2C szárral párhuzamos EB_1 szelő egy ugyancsak egyenlőszárú $EB_2B_1\triangle$-et vág le. Ennek alapja az A_2B_2 egyenesen, magassága pedig az alapra merőleges A_1B_1 egyenesen helyezkedik el. Ezeknek az egyeneseknek az M metszéspontja felezi tehát az EB_2 szakaszt.

Az egyenlőszárú $A_2B_2C\triangle$-ből egy az alapjával párhuzamos egyenes az ugyancsak egyenlőszárú $FB_1C\triangle$-et vágja le. Ennek száraira a megoldás elején mondottak szerint $FC = B_1C = A_2D$. Ha tehát ezt a háromszöget az A_1A_2 egyenes mentén eltoljuk, az $A_2ED\triangle$-höz jutunk. Ezért ED párhuzamos és egyenlő a B_1C szakasszal, tehát a $D'B_2$ szakasszal is. Ebből következik, hogy az EDB_2D' négyszög parallelogramma, hogy tehát EB_2 és DD' átlója egymást felezi, azaz M felezi a DD' szakaszt is. Minthogy a D, D' pontok a centrálisra vonatkozólag egymás tükörképei, összekötő szakaszuk M felezőpontja a centrálison van. (Ezt a megoldást a versenyen *Máté Attila* találta, de csak hiányosan dolgozta ki.)

IV. megoldás. A hatványvonalra vonatkozó ismeretekből felhasználjuk azt, hogy mindazok a pontok, amelyekből két egymást metsző körhöz húzott érintőszakaszok egymással egyenlők, a körök közös húrjának az egyenesén vannak.

Ismét abból indulunk ki, amit már az első megoldásban beláttunk, hogy az A_1B_1, A_2B_2 egyenesek egymást az M pontban merőlegesen metszik. *Thales* tétele szerint tehát M hozzátartozik az A_1A_2 átmérőjű körhöz is a (8. ábra).



8. ábra

Az O_1 pontból e két körhöz vont érintőkre $O_1A_1 = O_1B1$, s az O_2 pontból hozzájuk vont érintőkre $O_2A_2 = O_2B_2$. Az előrebocsátottak szerint tehát O_1 és O_2 egy olyan egyenesen van, amely a körök közös M pontját tartalmazza. Ez azt bizonyítja, hogy az O_1, O_2, M pontok egy egyenesen vannak.