I. megoldás. Abból indulunk ki, hogy ha $0 < a < 1$, akkor

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4},$$

hiszen ez átrendezéssel keletkezik a nyilván helyes $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből. Ebből (és a b, c számokra felírt hasonló egyenlőtlenségekből) következik, hogy a feladatunkban szereplő három szorzat szorzata

$$(1-b)b \cdot (1-b)c \cdot (1-c)a = a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

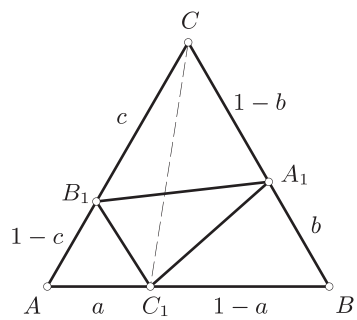
Mind a három vizsgált szorzat tehát nem lehet $\frac{1}{4}$ -nél nagyobb, mert akkor a szorzatuk $\left(\frac{1}{4}\right)^3$-nél nagyobb volna.

II. megoldás. A vizsgált három szorzat értékhármasa nem változik meg, ha az a, b, c számokat ciklikusan felcseréljük (azaz a b, c, a vagy a c, a, b sorrendre térünk át). Feltehetjük ezért, hogy a három szám közül a a legnagyobb, hogy tehát $b \leq a$. Ebből következik, hogy

$$(1-a)b \leq (1-a) \leq \frac{1}{4}.$$

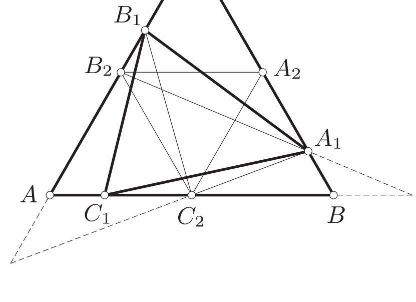
Az utolsó lépés felhasználta azt az egyenlőtlenséget, amelyből az első megoldás kiindult.

III. megoldás. Egy egységoldalú szabályos $ABC\triangle$ három csúcsából felmérjük a háromszög más-más oldalára az a, b, c távolságokat. A végpontok az $A_1B_1C_1\triangle$-et határozzák meg (3. ábra). Ezt a háromszöget az eredetivé három háromszög egészíti ki. Ezek területe az eredeti háromszög területének rendre $(1-a)b$, $(1-b)c$ és $(1-c)a$-szorosa, hiszen az $ABC\triangle$-ből pl. az AB alapot $(1-a)$-szorosára csökkentve a $C_1BC\triangle$-höz, s ennek magasságát b-szeresére csökkentve a $C_1BA_1\triangle$-höz jutunk.



3. ábra

Elég tehát megmutatnunk, hogy *ha egy egységterületű szabályos háromszögbe háromszöget írunk, akkor a keletkező három kiegészítő háromszög között van $\frac{1}{4}$-nél nem nagyobb területű.* A középvonalak határolta $A_2B_2C_2\triangle$-ről és az ezt kiegészítő háromszögekről tudjuk, hogy területük $\frac{1}{4}$. Állításunk nyilvánvalóan helyes tehát akkor, ha a most említett háromszögek valamelyike tartalmazza beírt $A_1B_1C_1\triangle$-ünk kiegészítő háromszögeinek valamelyikét. Feltehetjük ezért, hogy a középvonalak szétválasztják a rendre a BC, CA, AB oldalakon elhelyezkedő A_1, B_1, C_1 pontokat (4. ábra), mégpedig válassza el a C_2A_2, A_2B_2, B_2C_2 középvonal rendre az A_1, B_1, C_1 pontot a másik kettőtől. Ennek az elhelyezkedésnek arra a következményére fogunk támaszkodni, hogy az A_1B_1 egyenes metszi az AB félegyenest, s hogy a C_2A_1 egyenes metszi a CA félegyenest. Elegendő most már csak azt bizonyítanunk, hogy *az $A_1B_1C_1\triangle$ területe $\frac{1}{4}$-nél nagyobb.* Ebből következik ugyanis, hogy kiegészítő háromszögeinek területösszege $\frac{3}{4}$-nél kisebb, hogy tehát van közöttük $\frac{1}{4}$-nél kisebb területű.



4. ábra

Az $A_1B_1C_1\triangle$ területét csökkentjük, ha C_1 csúcsát C_2-be toljuk el. Ez abból következik, hogy C_1 az eltoláskor közeledik az A_1B_1 egyeneshez, hiszen közeledik az AB és az A_1B_1 egyenesek metszéspontjához. Az $A_1B_1C_2\triangle$ területe tovább csökken, ha B_1 csúcsát B_2-be toljuk el, mert ekkor B_1 az AC, C_1A_2 egyenesek metszéspontjához, tehát az A_1C_2 egyeneshez is közeledik. Ha a kapott $A_1B_2C_2\triangle$ A, csúcsát a B_2C_2 oldallal párhuzamosan A_2-be toljuk el, területe nem változik meg. Minthogy területcsökkentéssel az $\frac{1}{4}$ területű $A_2B_2C_2\triangle$-höz jutottunk, az $A_1B_1C_1\triangle$ területe $\frac{1}{4}$-nél valóban nagyobb.

Megjegyzések. 1. A feladatot megoldó versenyzők nagy többsége az első megoldást találta meg. A második megoldás mondható a legegyszerűbbnek. A harmadik megoldás lényegesen bonyolultabb, viszont rámutat arra a geometriai háttérre, amelyből a feladat származott.

2. Feladatunk az a, b, c számokra vonatkozó két megszorítást tartalmaz: megköveteli egyrészt, hogy ezek a számok 1-nél kisebbek, másrészt azt is, hogy pozitívak legyenek. Egyik megszorításra sincs szükség, de valamelyikre szükség van.

Ha ugyanis csak azt követeljük meg, hogy a számok 1-nél kisebbek legyenek, akkor $1-a$, $1-b$, $1-c$ pozitív értékek, s az esetleg előforduló negatív vagy 0 értékű b, c, a számmal szorozva $\frac{1}{4}$-nél kisebb szorzatot adnak. Ha viszont csak a, b, c pozitivitásához ragaszkodunk, akkor ezeket az esetleg előforduló negatív vagy 0 értékű $1-c$, $1-a$, $1-b$ értékekkel szorozva jutunk $\frac{1}{4}$-nél kisebb eredményhez. A feladat állítása ezek szerint mindkét esetben csak érdektelen tartalommal bővül. A két bővítés egymástól lényegében nem is különbözik, hiszen a feladat változatlan marad, ha benne a, b, c helyébe rendre az $1-c$, $1-b$, $1-a$ értékeket írjuk. Az $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=-1$ példa mutatja, hogy mind a két követelést nem hagyhatjuk el.

3. Első két megoldásunk módszerével (az előző megjegyzésre is támaszkodva) könnyedén bebizonyíthatjuk, hogy ha az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, számok pozitívak, akkor az

$$(1-a_1)a_2, \quad (1-a_2)a_3, \quad \ldots, \quad (1-a_n)a_1$$

szorzatok nem lehetnek mindannyian $\frac{1}{4}$-nél nagyobbak, sőt feladatunk még messzebb menő általánosításaként azt is, hogy ha a pozitív $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ számoknak egy permutációja $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ akkor az

$$(1-a_1)b_1, \quad (1-a_2)b_2, \quad \ldots, \quad (1-a_n)b_n$$

számok sem lehetnek mindannyian $\frac{1}{4}$-nél nagyobbak.

4. Feladatunk annak bizonyítását kívánta meg, hogy három szám legkisebbike $\frac{1}{4}$-nél nem nagyobb. Kérdezhetjük, hogy ha ezt a három számot nagyság szerint, rendezzük, mit mondhatunk ki a középsőről és a legnagyobbról. Könnyű belátni, hogy (0 és 1 közötti számok körében maradva) a középső nem lehet $\frac{1}{2}$-nél nagyobb, s hogy további korlátozása három szám egyikére sem mondható ki.

Ha az előző megjegyzés általánosításainak a körében vetjük fel a hasonló problémát, kérdezve, hogy a nagyság szerint rendezett szorzatok közül az i-edikre milyen korlátozásnak kell teljesülnie ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), akkor már nehezebb problémákhoz jutunk.