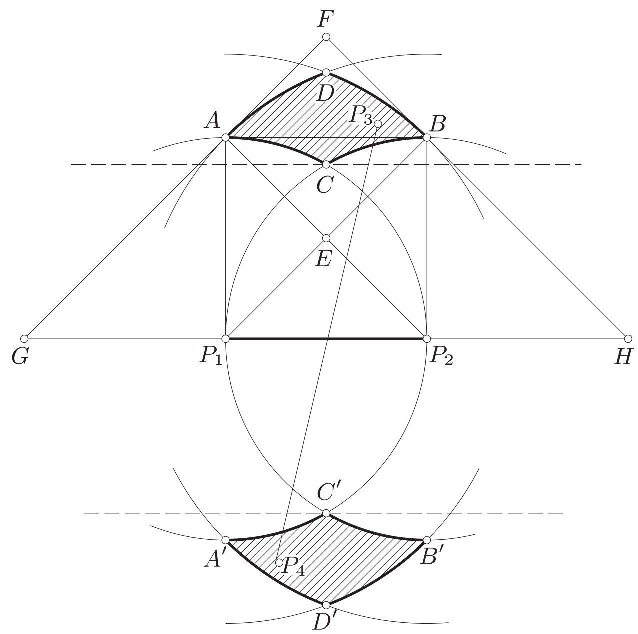
I. megoldás. Legyen P_1, P_2, P_3, P_4 a sík szóban forgó négy pontja. Válasszuk hosszegységül az általuk meghatározott távolságok legkisebbikét. Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy a hat távolság között van legalább $\sqrt{2}$ hosszúságú.

Legyen P_1 és P_2 egymástól minimális, tehát egységnyi távolságra. Írjunk köréjük egy-egy egységsugarú kört (1. ábra). A P_3, P_4 pontok egyike sem lehet e körök valamelyikén belül, mert akkor P_1P_2 nem volna minimális. Írjunk most P_1 és P_2 köré $\sqrt{2}$ sugárral egy-egy kört. Ezek a P_1P_2BA négyzet B, ill. A csúcsán haladnak át. Ha a P_3, P_4 pontok valamelyike nincs a két most rajzolt kör valamelyikén belül, akkor a kör középpontjától legalább $\sqrt{2}$ távolságra van.



1. ábra

Ezek szerint csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor P_3 is és P_4 is az utóbb rajzolt körök mindegyikén belül helyezkedik el, de egyikük sincs az előbb rajzolt körök valamelyikének a belsejében. Ez azt jelenti, hogy P_3 és P_4 ábránk körívekkel határolt, vonalkázott tartományaiban van, de a tartományok határvonalából az AD, DB ívek, valamint az $A'D'$, $D'B'$ ívek pontjait nem számítjuk a tartományokhoz.

Ábránkból kiolvashatjuk, hogy az $ACBD$ ívnégyszög az AB átlójú négyzetben helyezkedik el, s hogy az ívnégyszög pontjai közül csak A és B van a négyzet határvonalán (lásd az alábbi megjegyzést). Ebből a szimmetria miatt mindkét tartományunkra következik, hogy egy tartomány bármely két pontjának távolsága 1-nél kisebb, hiszen egy négyzetben elhelyezkedő szakasz, ha a négyzetnek nem átlója, akkor az átlónál rövidebb. Még nyilvánvalóbb ez a tény, ha arra gondolunk, hogy a négyzet köré írt kör átmérője a négyzet átlója, s hogy a körlemezen elhelyezkedő szakasz, ha nem átmérő, akkor az átmérőnél rövidebb.

Arra az esetre szorítkozhatunk tehát, amikor P_3 és P_4 más-más vonalkázott tartományhoz tartozik. A C, C' pontokon át párhuzamosokat húzunk a P_1P_2 szakasszal. E párhuzamosok által határolt sáv elválasztja a két vonalkázott tartományt, és szélessége $\sqrt{2}$-nél nagyobb, hiszen a CP_1 és P_1C' egységnyi szakaszok szöge 120°, azaz nagyobb, mint 90°. A P_3P_4 szakasz ezek szerint átvágja az említett sávot, s hossza ezért legalább akkora, mint a sáv szélessége, tehát $\sqrt{2}$-nél nagyobb.

Megjegyzés. Az ábrából olvastuk ki azt, hogy az AB átlójú négyzet tartalmazza az $ACBD$ ívnégyszöget, s hogy az ívnégyszög pontjai közül csak A és B van a négyzet határán. Ezt itt szigorúbban be is bizonyítjuk.

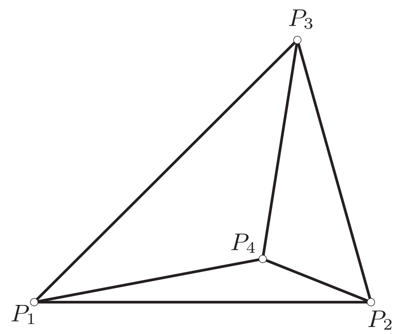
Nyilvánvaló, hogy az A, B pontok az ívnégyszöghöz tartoznak. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy az ívnégyszögnek nincs más pontja a négyzet határán. Nyilvánvaló, hogy az AF, BF egyeneseken nincs az ívnégyszögnek további pontja, hiszen ezek az egyenesek az ívnégyszöget tartalmazó köröket az A, ill. B pontban érintik. Ebből az is következik, hogy ívnégyszögünk az $FGH\triangle$-ben helyezkedik el. A P_1 középpontú kör AP_2, íve kettévágja ezt a háromszöget, és elválasztja az ívnégyszöget az AP_2 húrtól. Közös pontjuk csak a húr végpontja lehet. Ezért az ívnégyszögnek nincs az AE szakaszon elhelyezkedő, A-tól különböző pontja. Hasonló indokolással nincs a BE szakaszon elhelyezkedő, B-től különböző pontja sem.

II. megoldás. Ha a derékszögű háromszög átfogóját a kisebbik (pontosabban: a másiknál nem nagyobb) befogóval elosztjuk, $\sqrt{2}$-nél nem kisebb hányadoshoz jutunk. Ez abból következik, hogy $a \le b$ esetén $c^2 = a^2 + b^2 \ge 2a^2$, tehát $c/a \ge \sqrt{2}$.

Ha a háromszög két oldalát változatlanul hagyjuk, de az általuk közrefogott szöget növeljük, akkor a harmadik oldal is növekszik. Ezért tompaszögű háromszögre, sőt (egy egyenesen elhelyezkedő, csatlakozó szakaszokká) elfajuló háromszögre is kimondhatjuk, hogy legnagyobb oldala a legkisebbel osztva legalább $\sqrt{2}$ értékű hányadost ad.

Elég ezért azt bizonyítanunk, hogy a sík bármely négy pontja között van három olyan, amely derékszögű, tompaszögű vagy elfajuló háromszöget határoz meg. Induljunk ki a sík négy pontjából. Feltehetjük, hogy nincs közöttük három egy egyenesen elhelyezkedő. Tekintsük a négy pont konvex burkát, azaz azt az idomot, amelyet úgy kapunk, hogy a pontok köré fonalat feszítünk. Minthogy a pontok nincsenek mindannyian egy egyenesen, konvex burkuk vagy háromszög, vagy négyszög.

Ha a $P_1P_2P_3\triangle$-höz jutunk (2. ábra), akkor P_4 ennek belsejében van, hiszen három pont nem lehet egy egyenesen. A P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3 szakaszok háromszögünket három háromszögre vágják fel. Ezeknek P_4-nél elhelyezkedő három szöge együttesen 360°, s ezért közöttük tompaszög is van (sőt közülük legalább kettő tompa). Egy ilyen tompaszög a pontjainkból alakított tompaszögű háromszög szöge.



2. ábra

Ha a konvex burok négyszög, akkor ennek a szögeiről elmondhatjuk, hogy nem lehet mindegyik hegyes, hiszen az összegük 360°. A legnagyobb szög tehát derékszög vagy tompaszög, s ez egy a pontjainkból alakított derékszögű vagy tompaszögű háromszög szöge.

Megjegyzések. 1. A feladat állításánál valamivel többet is kimondhatunk. Nemcsak az igaz, hogy a vizsgált hányados nem lehet $\sqrt{2}$-nél kisebb, hanem az is, hogy $\sqrt{2}$ a legkisebb olyan szám, amelyre ez igaz. Ezt a négyzet négy csúcsa bizonyítja, hiszen belőlük $\sqrt{2}$ adódik hányadosul.

Még azzal is kiegészíthetjük a mondottakat, hogy $\sqrt{2}$ csak egy négyzet csúcsai esetében lép fel hányadosként. Ez mindkét megoldásunkból könnyen kiolvasható.

2. Felmerül a kérdés, hogy ha a síknak nem négy, hanem $n > 2$ pontjából indulunk ki, akkor az általuk meghatározott távolságok legnagyobbikát a legkisebbel osztva mekkora hányadoshoz juthatunk. Ez a hányados természetesen tetszőlegesen nagy lehet. Kérdésünk az, hogy mi a hányados lehetséges legkisebb értéke. Azt is kérdezhetjük, hogy a lehetséges legkisebb érték a pontok milyen elhelyezkedése esetén lép fel.

Az $n = 3$ esetben nyilvánvaló, hogy 1 a minimum, s hogy ezt csak a szabályos háromszög csúcsai szolgáltatják. Feladatunk az $n = 4$ esetről szólt. Második megoldásunk módszerével könnyű bebizonyítani, hogy ha $n = 5$, akkor a minimumot a szabályos ötszög csúcsai szolgáltatják, tehát a minimum értéke $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) \approx 1{,}618$, s hogy ez más esetben nem lép fel. Ezt a bizonyítást *Bollobás Béla* a versenydolgozatában el is végezte.

Az $n > 5$ esetekben nem ismeretes a válasz. Megemlítendő mindenesetre, hogy már az $n = 6$ esetben sem adja a szabályos sokszög a minimális értéket, hiszen a szabályos hatszög minden második csúcsát „benyomva” a vizsgált hányados csökken, amit nem nehéz bebizonyítani.

3. Még nehezebb a kérdés, ha nem a sík, hanem a tér pontjaira vetjük fel. Itt természetesen csak az $n > 4$ esetekre gondolunk. Már az $n = 5$ eset elintézése sem könnyű. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy ekkor a minimumot szolgáltató öt pontot úgy kell felvenni, hogy közülük három egy szabályos háromszöget határozzon meg, a másik kettő a háromszög síkjára szimmetrikusan, a háromszög síkjára a háromszög középpontjában emelt merőlegesen helyezkedjék el, és távolságuk a háromszög oldalával legyen egyenlő. A minimum értékére $\sqrt{12/7} \approx 1{,}309$ adódik. Említést érdemel, hogy ez a síkban négy pontra adódó értéknél kisebb.

4. A feladatnak még egy másirányú általánosítását is megemlítjük. A sík négy pontjából indulunk ki. Az általuk meghatározott hat távolságot nagyság szerint rendezzük: a legnagyobbal kezdjük, a legkisebbel végezzük, s közben természetesen ismétlődést is megengedünk. Ha e sorozat i-edik elemét a k-adikkal elosztjuk, a $q(i,k)$-val jelölt hányadoshoz jutunk. Azt kérdezzük, hogy megadott $i < k$ értékekre ez a hányados milyen értékeket vehet fel. Ez a kérdés i és k különféle megválasztásának megfelelően 15 különböző kérdést tartalmaz. Feladatunk csak $q(1,6)$ értékével foglalkozott, és $q(1,6) \geq \sqrt{2}$ bizonyítását kívánta. Első megjegyzésünk rámutatott, hogy $q(1,6)$ felveheti a $\sqrt{2}$ értéket is. Könnyű belátni, hogy minden nagyobb értéket is felvehet. A $q(1,6)$-ra felvetett kérdésre tehát azt kell felelnünk, hogy $q(1,6)$ értéke lehet minden olyan szám, amely $\sqrt{2}$-nél nem kisebb.

A többi 14 kérdés vizsgálatát az olvasóra hagyjuk. Különösebb nehézséget egyikük megválaszolása sem jelent, de vigyázni kell, mert a felelet nem minden kérdésre ugyanaz.

Hasonló kérdést vethetünk fel a sík n pontjára, vagy a tér n pontjára is. Így már nehéz kérdésekhez is eljutunk, és csak nagyon kevés rájuk vonatkozó ismert választ említhetnénk. Megemlítjük, hogy a sík $3n$ pontjára vonatkozólag $q(1,\,3n^2+1)\geq\sqrt{2}$. Ezt *Turán Pál* és *Erdős Pál* bizonyította be. Bizonyításuk többek között éppen feladatunk állítására támaszkodik. Maga a feladat is innen ered.