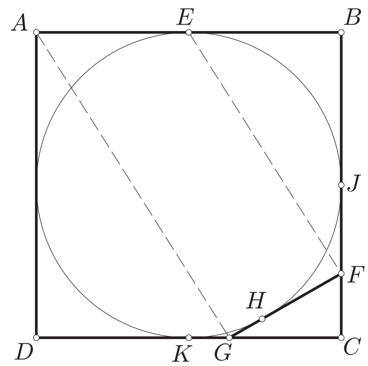
I. megoldás. Ha a $CFG\Delta$-höz írt, az FG oldalt kívülről érintő kör ezt az oldalt H-ban, a CF, CG oldalak meghosszabbítását pedig a J, K pontokban érinti (2. ábra), akkor ez utóbbiakra

$$CJ = CK \qquad \text{és} \qquad FJ + GK = FG, \tag{1}$$

hiszen az egy pontból ugyanahhoz a körhöz vont érintőszakaszok egyenlők, s ezért $FJ = FH$ és $GK = GH$.



2. ábra

Azt állítjuk, hogy (1) a CF, CG oldalak meghosszabbításain elhelyezkedő pontpárok közül csak a szóban forgó érintési pontokra teljesül. Ha ugyanis a J, K pontokat elmozgatva növeljük vagy csökkentjük a $CJ = CK$ távolságot, akkor $FJ + GK$ is növekszik vagy csökken, tehát már nem lehet FG-vel egyenlő.

Ezek szerint elég azt bizonyítanunk, hogy a négyzet BC, CD oldalainak J, K felezőpontjaira (1) teljesül, mert ebből következik, hogy a J, K pontokban érintő, tehát a négyzetbe írt kör érinti az FG oldalt is. Felhasználtuk itt azt, hogy J és K a CF, CG szakaszok meghosszabbításán van. Ez abból következik, hogy $AC \parallel EJ$ és $AK \parallel EC$, s ezért a DGC sorrendből a CFJ sorrend, a BFC sorrendből pedig a CGK sorrend következik.

Legyen a négyzet oldala 2, azaz válasszuk hosszegységül az oldalhossz felét. Ha tehát $DG = x$, akkor

$$CG = 2 - x, \qquad GK = x - 1.$$

Az ADG, FBE háromszögek hasonlók, mert oldalaik párhuzamosak. Ezért $2 : x = FB : 1$, tehát $FB = 2/x$, és így

$$CF = 2 - \frac{2}{x}, \qquad FJ = \frac{2}{x} - 1.$$

Minthogy $(FJ + GK)^2 = FG^2$ bizonyítására van szükségünk, Pythagoras tétele szerint már csak

$$\left[\left(\frac{2}{x} - 1\right) + (x - 1)\right]^2 = \left(2 - \frac{2}{x}\right)^2 + (2 - x)^2$$

helyességét kell belátnunk. Ez valóban helyes, hiszen a bal oldal

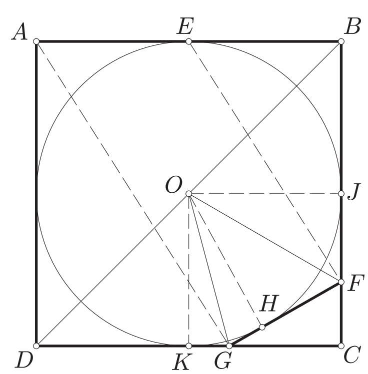
$$\left(\frac{2}{x} - 2 + x\right)^2 = \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2 + 2x\left(\frac{2}{x} - 2\right) + x^2$$

alakban írható, s itt az utolsó két tag együttes értéke $4 - 4x + x^2 = (2 - x)^2$.

II. megoldás. Ha a derékszögű $CFG\Delta$-höz írt, az FG átfogót kívülről érintő kör középpontja O (3. ábra), akkor

$$FOG\sphericalangle = 45^\circ, \tag{2}$$

hiszen OF és OG felezi az egymást derékszöggé kiegészítő JOH, HOK szögeket, ahol H, J, K az előző megoldásban bevezetett pontok.



3. ábra

Azt állítjuk, hogy (2) az FCG derékszög szögfelezőjén elhelyezkedő pontok közül csak a szóban forgó középpontra teljesül. Ha ugyanis O a szögfelezőn elmozdulva közeledik a szögfelezőt metsző FG szakaszhoz, vagy távolodik tőle, akkor az FOG látószög növekszik, illetőleg csökken.

Ezek szerint elég azt bizonyítanunk, hogy (2) a négyzet O középpontjára teljesül, tehát azt, hogy

$$FOG\sphericalangle = GDO\sphericalangle. \tag{3}$$

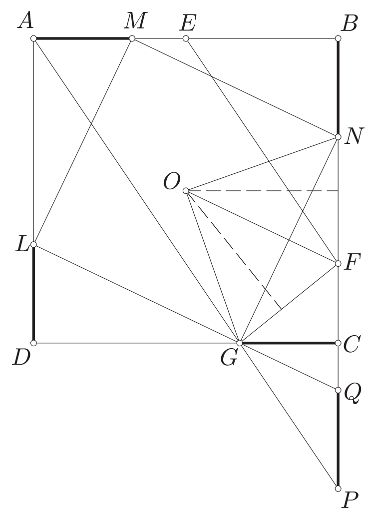
E szögek közül az elsőt a GOD, FOB szögek, a másodikat a GOD, OGD szögek $180°$-ra egészítik ki. Ezért (3) igazolásához csak

$$FOB\sphericalangle = OGD\sphericalangle \tag{4}$$

bizonyítására van szükség.

Ennek bizonyításához abból indulunk ki, hogy az ADG, FBE háromszögek hasonlósága miatt $DG : 2a = a : BF$, ahol $2a$ a négyzet oldalhossza. Eszerint $DG \cdot BF = 2a^2$, vagyis $DG : DO = BO : BF$, hiszen $DO = BO = a\sqrt{2}$. Ebből az aránypárból következik azonban, hogy $GDO\Delta \sim OBF\Delta$, hiszen ezekben a háromszögekben $GDO\sphericalangle = OBF\sphericalangle = 45°$. A hasonlóság miatt a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát (4) valóban teljesül.

III. megoldás. Mérjük fel négyzetünk négy oldalára a $CG = DL = AM = BN$ szakaszokat (4. ábra). A forgásszimmetria miatt $GLMN$ is négyzet. Messék az AG, LG egyenesek a BC egyenest a P, Q pontokban. Minthogy az $ALDG$ pontnégyes a szerkesztés révén hasonló a $PQCG$ pontnégyeshez, és az előbbiben $AL = DG$, azért a másik pontnégyes megfelelő pontjaira $PQ = CG$. Így tehát $PQ = BN$.

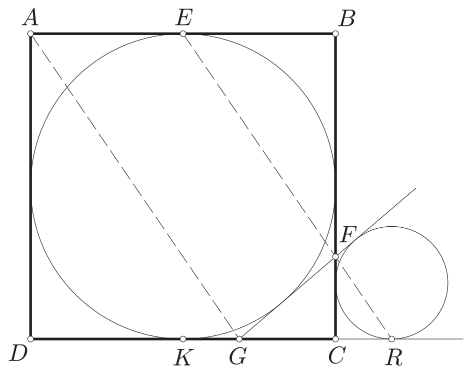


4. ábra

Minthogy EF az $APB\Delta$ középvonala, F felezi a PB szakaszt, tehát az ezen belül szimmetrikusan elhelyezkedő QN szakaszt is. Eszerint F a derékszögű $QNG\Delta$ átfogójának felezőpontja, egyenlő távolságra van tehát e háromszög csúcsaitól, azaz $FG = FN$. Ebből következik, hogy $OFG\Delta \simeq OFN\Delta$, hiszen a forgásszimmetria miatt $OG = ON$, tehát a két háromszög oldalai páronként egyenlők. A bizonyított egybevágóságból következik, hogy az O pont az FG, FN egyenesektől egyenlő távolságra van, hogy tehát a négyzetbe írt kör az FG szakaszt is érinti.

IV. megoldás. Ha az F pontot ismerjük, akkor az $AG \parallel EF$ előírás egyértelműen meghatározza a G pontot. Ha F-ből a négyzetbe írt körhöz második érintőt vonunk, akkor ez a CD oldalból F által ugyancsak egyértelműen meghatározott pontot metsz ki. Feladatunk azt állítja, hogy ez a két hozzárendelés azonos. Ezt most úgy bizonyítjuk, hogy a négyzetbe írt kört érintő FG szakaszból indulunk ki, és megmutatjuk, hogy $AG \parallel EF$.

Tekintsük a négyzetbe írt kör mellett a $CFG\Delta$-höz írt, a CF oldalt kívülről érintő kört (5. ábra). Érintse ez a CD egyenest az R pontban. F a két kör belső hasonlósági pontja, hiszen közös belső érintőik metszéspontja. Ebből következik, hogy a két kört ellentétes oldalról érintő és párhuzamos AB, DC egyenesek E, R érintési pontjai a hasonlóság által egymáshoz rendelt pontok, hogy tehát az E, F, R pontok egy egyenesen vannak.



5. ábra

Azt kell bizonyítanunk, hogy AG párhuzamos EF-fel, azaz ER-rel tehát azt, hogy $AERG$ parallelogramma. Ehhez $GR = AE$ bizonyítására van szükség. Ez viszont következik abból, hogy egyrészt $AE = KC$, ahol K a CD oldal felezőpontja, másrészt pedig $GR = KC$ is teljesül, hiszen ismeretes, hogy egy háromszög valamely oldalának két meghosszabbítását a háromszöghöz írt körök az oldalhoz viszonyítva szimmetrikusan elhelyezkedő pontokban érintik.

Megjegyzések. 1. Harmadik feladatunk állítása akkor is helyes, ha benne nem a BC, CD oldalakon, hanem a BC, CD oldalegyeneseken elhelyezkedő pontokról szólunk, és nem az FG szakaszról, hanem az FG egyenesről állítjuk, hogy érinti a négyzetbe írt kört. Harmadik megoldásunk közvetlenül alkalmas ennek bizonyítására is, a többinél pedig csekély módosításra van ehhez szükség. Az olvasóra hagyjuk, hogy ezeket a módosításokat megkeresse.

2. Akkor is helyes marad feladatunk állítása, ha nem négyzetről, hanem rombuszról szólunk, és E nem az AB oldal felezőpontját, hanem a rombuszba írt kör és az AB oldal érintési pontját jelenti. Negyedik megoldásunk közvetlenül alkalmazható ennek a bizonyítására is.

A rombuszra kimondott állítás szintén helyes marad, ha a BC, CD, FG szakaszok szerepét e szakaszok egyenesei veszik át. A negyedik megoldás az előbb már említett módosítás után ezt is bizonyítja.

3. Pusztán megemlítjük, hogy harmadik feladatunk állítását nagyon gyorsan bizonyíthatja, aki ismeri a kúpszeletek érintőiről szóló Brianchon-tételt, s hogy ez a rövid bizonyítás az előbb említett általánosítások mindegyikét közvetlenül bizonyítja. A részletekbe itt nem bocsátkozhatunk, mert ehhez a középiskolai anyagot messze meghaladó ismeretekre volna szükség.