Megjegyzés. A feladat csak arra az esetre vonatkozik, amikor a társasutazásnak van legalább négy résztvevője. Ha ez nem áll fenn, akkor a feladat feltevése és állítása egyaránt semmitmondó.

I. megoldás. Legyen A és B két olyan résztvevő, akik korábban még nem találkoztak. Feltehetjük, hogy van két ilyen, hiszen különben bármely résztvevő megfelelne a feladat kívánalmának. Azt is feltehetjük, hogy van az AB pártól különböző utaspár, akik szintén először találkoznak, mert különben minden A-tól és B-től különböző résztvevő megfelelne, és bármely négy résztvevő között van ilyen (sőt legalább kettő).

Az AB-től különböző, ugyancsak először találkozó utaspárban szerepelnie kell A-nak vagy B-nek, mert ha ez a CD utaspár A-tól és B-től különböző útitársakból állna, akkor A, B, C, D közül egyik sem találkozott volna korábban a másik három mindegyikével, és ez ellentmond a feladat feltevésének. Legyen tehát AC ez az AB-től különböző, ugyancsak először találkozó utaspár, hiszen minden lehetséges eset ezzé az esetté betűzhető át.

Azt vizsgáljuk most, hogy mely AB-től és AC-től különböző utaspár állhat olyanokból, akik máskor még nem találkoztak. Az előző bekezdés szerint A-nak vagy B-nek az ilyen utaspárban is szerepelnie kell, de ugyanolyan indokolással szerepelnie kell benne A és C valamelyikének is. Eszerint ez a további először találkozó utaspár csak BC vagy pedig AD lehet, ahol D egy még nem említett résztvevő.

Az utóbbi eset azonban lehetetlen, mert akkor az A, B, C, D résztvevőkre nem teljesülne a feladat feltevése. Eszerint az AB, AC párokon kívül csak BC állhat egymással először találkozó útitársakból, tehát minden A-tól, B-től és C-től különböző résztvevőnek találkoznia kellett már minden útitársával. Minthogy bármely négy résztvevő között van ilyen, a feladat állítása helyes.

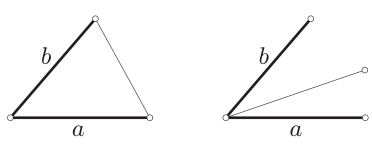
Megjegyzés. Egyszerűbbé válik feladatunk megoldása, ha ábrázoljuk a vizsgált viszonyokat, és megfelelő elnevezéseket vezetünk be.

Ábrázoljuk a társasutazás résztvevőit egy-egy ponttal, és kössünk össze kettőt-kettőt közülük egy vonaldarabbal akkor, ha a két pontnak megfelelő útitárs korábban még nem találkozott. Az összekötő vonalakat úgy választjuk meg, hogy ne haladjanak át más résztvevőt ábrázoló ponton. Ilyen módon egy *gráfhoz* jutottunk, amelynek *szögpontjai* az útitársaknak, *élei* pedig az először találkozó utaspároknak felelnek meg. Ha a gráf élei esetleg metszik vagy érintik egymást, közös pontjukat nem számítjuk a gráf szögpontjai közé. Az általunk bevezetett gráfnak véges sok szögpontja van, minden éle két-két egymástól különböző szögpontot köt össze, és ugyanazt a szögpontpárt csak legfeljebb egy él köti össze. Ha a következőkben gráfról lesz szó, mindig csak ilyen gráfra gondolunk.

Ha feladatunkat a most bevezetett gráfra szövegezzük meg, a feladat a következő alakot ölti: *Egy gráfnak nincs négy olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a másik három szögpont valamelyikéhez. Bebizonyítandó, hogy a gráf bármely négy szögpontja között van olyan, amelyből nem indul ki él.* Semmitmondó esetek kizárása kedvéért hozzátehettük volna, hogy a gráfnak legalább négy szögpontja van.

Az így szövegezett feladat megoldása rövidebb és áttekinthetőbb. Ezt a közölt megoldás átszövegezésén mutatjuk be:

Feltehetjük, hogy a gráfnak van legalább két éle, a és b, mert különben legfeljebb két szögpont kivételével egyikből sem indul ki él, és bármely négy szögpont között van ilyen. Az a, b élek egyik végpontja közös, mert különben négy végpontjukra nem teljesülne a feladat feltevése. Ebből az is következik, hogy az a, b éleken kívül csak olyan él szerepelhet, amelynek van közös pontja a-val is és b-vel is. Az ilyen él tehát (1. ábra) vagy a és b szabad végpontját köti össze, vagy pedig közös végpontjukból indul ki. Az utóbbi eset lehetetlen, mert akkor a három él négy végpontja ellentmondana a feladat feltevésének. Ezek szerint csak az a, b élek három végpontjából indul ki él, bármely négy szögpont között van tehát olyan, amelynek nincs meg ez a tulajdonsága.



1. ábra

II. megoldás. Feltesszük, hogy van legalább négy olyan résztvevő, aki valamely útitársával a társasutazáson találkozik először, hogy tehát a feladat állítása nem teljesül, és bebizonyítjuk, hogy akkor a feladat feltevése sem teljesülhet, hogy tehát van négy olyan résztvevő, akik közül egyik sem találkozott korábban a másik három mindegyikével. Ez bizonyítja majd, hogy ha a feladat feltevése teljesül, állításának is teljesülnie kell.

Ismét abból indulunk ki, hogy A és B először találkozik egymással. Ha két tőlük különböző résztvevő korábban még nem találkozott, akkor máris találtunk az állításunkat bizonyító négy résztvevőt.

Legyen C és D két olyan további résztvevő, akik nem mindenkivel találkoztak korábban. Mostani feltevésünk szerint biztosan van két ilyen. Az előző bekezdés szerint csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor C is és D is csak már megbetűzött résztvevővel találkozik először. Ekkor azonban A, B, C és D négy olyan útitárs, akiknek egyike sem találkozott korábban a másik három mindegyikével, akik tehát állításunk helyességét bizonyítják.

Megjegyzések. 1. Második megoldásunk a gráfokra átültetett feladat szövegének további átfogalmazását teszi indokolttá. Ha a gráfból elhagyjuk azokat szögpontokat, amelyekből nem indul ki él, akkor a feladat következő megfogalmazásához jutunk: *Egy gráf minden szögpontjából kiindul él, de nincs négy olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a másik három valamelyikébe. Bebizonyítandó, hogy a gráfnak négynél kevesebb szögpontja van.*

Ha ezt a feladatot ugyanúgy átszövegezzük, ahogyan az eredeti feladattal második megoldásunk elején tettük, akkor feladatunk következő újabb szövegéhez jutunk: *Egy gráfnak legalább négy szögpontja van, és minden szögpontjából kiindul él. Bebizonyítandó, hogy van a gráfnak négy olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a másik három valamelyikéhez.* Az olvasóra hagyjuk, hogy második megoldásunkat e feladat megoldásává írja át.

2. Második megoldásunk mintájára bebizonyítjuk, hogy utolsó állításunk akkor is helyes, ha benne 4 helyett tetszőleges páros $2k$ természetes szám áll. Az általánosított feladat tehát a következőképpen szól: *Egy gráfnak legalább $2k$ szögpontja van, és minden szögpontjából kiindul él. Bebizonyítandó, hogy van a gráfnak $2k$ olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a többi $2k-1$ szögpont valamelyikéhez.*

Válasszunk ki gráfunkból lehetőleg sok független élt, azaz olyanokat, amelyeknek végpontjai mind különbözők. Ha van k független él, akkor ezek végpontjai máris bizonyítják állításunk helyességét. Ha csak $j<k$ független élt választhattunk ki, ha tehát ezektől független $(j+1)$-edik él már nincs, akkor $2j$ végpontjukról tudjuk, hogy minden további szögpontból kiinduló él ennek a $2j$ végpontnak valamelyikébe fut. Ha tehát ehhez a $2j$ végponthoz bármely további $2k-2j$ szögpontot csatolunk, az állításunkat bizonyító $2k$ szögponthoz jutunk.

Megtehetnők, hogy a most bizonyított tényt annyiféleképpen fogalmazzuk át, ahányféleképpen ezt eredeti feladatunkkal megtettük. Megelégszünk azzal, hogy csak az eredeti megszövegezésbe öltöztetett eredményünket mondjuk ki: *Ha egy társasutazás bármely $2k$ résztvevője között van olyan, aki a többi $2k-1$ mindegyikével már máskor is találkozott, akkor bármely $2k$ résztvevő között van olyan, aki már minden útitársával találkozott.* Semmitmondó eseteket zárunk ki, ha megköveteljük, hogy a társasutazásnak legalább $2k$ résztvevője van. Megemlítjük, hogy a $k=1$ esetben az állítás nyilvánvalóan helyes, a $k=2$ eset pedig eredeti feladatunk állítása.

3. Felmerül a kérdés, hogy helyes marad-e utolsó eredményünk, ha benne $2k$ helyett egy páratlan $2k+1$ szám áll. Bebizonyítjuk, hogy így már hamis állításhoz jutunk, hogy tehát ez a módosítás az eddig említett különféle megszövegezések egyikénél sem megengedett. A $2k+1=1$ esetet figyelmen kívül hagyjuk, mert ebben az esetben a feladat értelmét veszti.

Bizonyítás céljából elég egy kellően sok független élből álló gráfot tekintenünk. Ennek van legalább $2k+1$ szögpontja, és minden szögpontjából kiinduló él. Nincs viszont $2k+1$ olyan szögpontja, amelyek mindegyikéből kiindul él a többi $2k$ szögpont valamelyikébe. Akárhogyan szemelünk ki ugyanis $2k+1$ szögpontot, az ezeket összekötő élek végpontjainak száma természetesen csak páros lehet, s így ezek nem meríthetik ki a $2k+1$ szögpontot. .