Igen egyszerű trigonometriai megoldás kínálkozik a feladatra és a versenyzők mind ilyen utat is választottak.

I. megoldás. Jelöljük a torony magasságát méterben mérve x-szel, a látószögét 100, 200, 300 m-ről rendre α, β, γ-val, ekkor

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{100}, \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{x}{200}, \quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{x}{300},$$

és feltétel szerint $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$, tehát

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{x}{300}=\operatorname{tg}\left[90^\circ-(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=$$

$$=\frac{\frac{100}{x}\cdot\frac{200}{x}-1}{\frac{100}{x}+\frac{200}{x}}=\frac{100\cdot 200-x^2}{300x}.$$

Innen

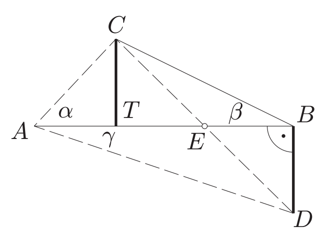
$$2x^2=100\cdot 200,$$

és mivel x gyanánt csak pozitív érték jön számításba, tehát a torony magassága $x=100$ m.

Megjegyzés. Mint többen észrevették, megoldható a feladat ugyanezzel a gondolatmenettel akkor is, ha tetszés szerinti a, b, c távolságokból mért α, β, γ látószögekről tudjuk azt, hogy összegük 90°. Ekkor a torony magassága $\sqrt{abc/(a+b+c)}$.

Megoldható azonban a feladat lényegesen egyszerűbb összefüggésekre támaszkodva is.

II. megoldás. Sík talajon nem lényeges, hogy milyen irányból mérjük a torony látószögét az adott távolságokból, válasszuk tehát a 100, ill. 200 m távolságra levő A, ill. B pontokat a toronytól egymással ellentétes irányban, a γ látószöget pedig szemléltessük úgy, hogy a B pontból az AB egyenesnek a torony C csúcsával ellentétes oldalán mérünk fel AB-re merőlegesen a torony magasságával egyenlő BD távolságot. Ekkor $BAD\sphericalangle=\gamma$, mert $AB=300$ m.



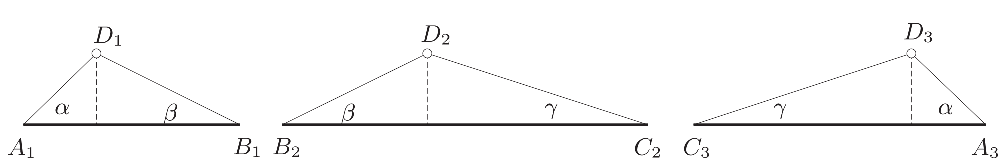
1. ábra

A torony T talppontja, C csúcsa továbbá a B és D pontok meghatározta négyszög paralelogramma, mert két oldala egymással párhuzamos és egyenlő, tehát CD a TB szakaszt E felezőpontjában metszi. Eszerint $ET=100$ m, s így $TEC\sphericalangle=\alpha$, az ACE háromszög egyenlő szárú. Megállapíthatjuk C-nél levő szögének a nagyságát is abból, hogy az $ADBC$ négyszög A-nál és B-nél levő (szemben fekvő) szögeinek összege $\alpha+\gamma+\beta+90^\circ$, a feltétel szerint 180°-ot ad; a négyszög tehát húrnégyszög, és AD a körülírt kör átmérője, mert a B pontból 90°-os szögben látszik. Így az $ACD\sphericalangle=ACE\sphericalangle$ szintén 90°-os, az ACE egyenlő szárú háromszög tehát derékszögű. Ebből adódik, hogy $\alpha=45^\circ$, így az ATC derékszögű háromszög ugyancsak egyenlő szárú, tehát a torony magassága 100 m.

III. megoldás. Rajzoljuk meg a tornyot háromféleképpen. Két oldalról egyrészt az α és β látószögű egyenesekkel, másrészt β és γ, harmadrészt γ és α látószögű egyenesekkel (2. ábra). A keletkező három háromszögben az A_1B_1, B_2C_2, C_3A_3 oldalakon levő szögek összege $2\alpha+2\beta+2\gamma=180^\circ$, így a D_1, D_2, D_3-nál levő szögek összege 360°. Mivel még $B_1D_1=B_2D_2$, $C_2D_2=C_3D_3$, $A_3D_3=A_1D_1$, így a három háromszög egy ABC háromszöggé tehető össze. Ennek oldalai $AB=300$ m, $BC=500$ m, $CA=400$ m kielégítik a

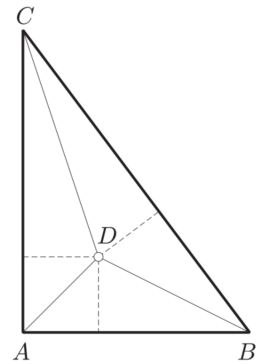
$$BC^2=CA^2+AB^2$$

összefüggést, és ismeretes, hogy ebből következik a háromszög derékszögű volta, (a Pythagorász-tétel megfordítható) derékszöggel az A csúcsnál. Így $2\alpha=90^\circ$, és ebből következik, hogy a torony 100 m magas.



2. ábra

Megjegyzés. A II. megoldás lényegesen kihasználja a feladat speciális adatait, a III. azonban csak részben. Ha ugyanis megfigyeljük, hogy az összeillesztésnél a D_1, D_2, D_3 egybeesésével keletkező D pont az ABC háromszög beírt körének a középpontja, akkor területszámítás segítségével más távolságadatok mellett is meghatározható a torony magassága.



3. ábra