I. megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy a kifejezést közös nevezőre hozva a számláló osztható a nevezővel, közelebbről azt, hogy a nevező tényezői kiemelhetők a számlálóból, a visszamaradó tényező x, y, z-nek egész együtthatós polinomja. Így ha x, y, z egész, akkor a kifejezés értéke is egész szám.

A közös nevezőre hozott alak

$$\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}\,. \tag{2}$$

Itt $n=0$-ra a számláló

$$(y-z)+(z-x)+(x-y)=0,$$

s így 0 a kifejezés értéke. Másrészt ebből

$$x-y=-(y-z)-(z-x).$$

Ezt felhasználva a számláló tetszés szerinti n-re a következőképpen alakítható:

$$(x^n-z^n)(y-z)+(y^n-z^n)(z-x).$$

Ez $n=1$-re 0-t ad, ha pedig $n\ge 2$, akkor $(x-z)(y-z)$-t, kiemelve a következőt kapjuk:

$$\begin{gathered}(x-z)(y-z)[x^{n-1}+x^{n-2}z+\ldots+xz^{n-2}+z^{n-1}-\\ -y^{n-1}-y^{n-2}z-\ldots-yz^{n-2}-z^{n-1}]=\\ =(x-y)(x-z)(y-z)\big[(x^{n-2}+x^{n-3}y+\ldots+xy^{n-3}+y^{n-2})+\\ +z(x^{n-3}+\ldots+y^{n-3})+\ldots+z^{n-2}\big].\end{gathered}$$

Itt a szögletes zárójelben x, y, z-nek egész együtthatós polinomja áll állításunknak megfelelően. (Az $n=2$ esetben a szögletes zárójelben csak az utolsó tag, az $n=3$ esetben pedig csak az első kifejezés és az utolsó tag lép fel.)

Megjegyzés. 1. Ha $n\ge 2$, a szögletes zárójelben egyszerű felépítésű polinom keletkezett: azoknak az x, y, z hatványait tartalmazó szorzatoknak az összege, amelyekben a hatványkitevők összege $n-2$.

2. Sok versenyző a feladat állítását bizonyítottnak vélte annyit mutatva meg, hogy a (2) alatti kifejezés számlálója osztható külön-külön az $x-y$, $x-z$, $y-z$ egészekkel. Ebből azonban csak akkor következtethetnénk arra, hogy ezek szorzatával is osztható a számláló, ha a három különbség semelyik kettőjének nem volna 1-nél nagyobb közös osztója; ez azonban általában nem teljesül.

Helyessé tehető ez az okoskodás, ha a számlálót és nevezőt az x, y, z változók polinomjának tekintjük. Ekkor az $x-y$, $x-z$, $y-z$ polinomoknak nincs változót tartalmazó közös osztója, és mindegyik kiemelhető a számlálóban szereplő polinomból. Ebből az egész együtthatós polinomok körében is következik, hogy a három kifejezés szorzata is kiemelhető a számlálóból. Néhány versenyző ezen az úton helyes bizonyítást adott a feladat állítására, ezzel azonban lényegesen mélyebb tételt használt fel bizonyítatlanul, mint a bizonyítandó állítás.

Helyessé tehető azonban ez a gondolatmenet a gyöktényezők kiemelésére vonatkozó tételt a következő alakban használva fel: *Ha egy $f(x)$ polinomnak gyöke a t szám, akkor $f(x)$ felbontható $x-t$-nek és egy polinomnak a szorzatára. Ha $f(x)$ egész együtthatós, és t is egész szám, akkor $x-t$ szorzója is egész együtthatós polinom.* Ez könnyen leolvasható a gyöktényező kiemelésére vonatkozó szokásos bizonyításokból például a következő módon: Legyen

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \quad \text{és} \quad f(t)=0.$$

Ekkor

$$\begin{gathered}f(x)=f(x)-f(t)=a_0(x^n-t^n)+a_1(x^{n-1}-t^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(x-t)=\\ =(x-t)\big[a_0(x^{n-1}+x^{n-2}t+\ldots+t^{n-1})+a_1(x^{n-2}+\ldots+t^{n-2})+\ldots+a_{n-1}\big]=\\ =(x-t)\big[a_0x^{n-1}+(a_0t+a_1)x^{n-2}+(a_0t^2+a_1t+a_2)x^{n-3}+\ldots+\\ +(a_0t^{n-1}+a_1t^{n-2}+\ldots+a_{n-1})\big].\end{gathered}$$

Ha itt az a_i együtthatók és t egész szám, akkor nyilvánvalóan egész együtthatós a szögletes zárójelben levő kifejezés is.

Ennek alapján a feladat állítása így látható be:

II. megoldás. A (2) kifejezés számlálója 0, ha n értéke 0 vagy 1. Ha $n\ge 2$, akkor rendezzük a kifejezés számlálóját x hatványai szerint, és végezzük el a kínálkozó kiemelést:

$$\begin{gathered}x^n(y-z)-x(y^n-z^n)+yz(y^{n-1}-z^{n-1})=\\ =(y-z)\big[x^n-x(y^{n-1}+y^{n-2}z+\ldots+z^{n-1})+yz(y^{n-2}+\ldots+z^{n-2})\big].\end{gathered} \tag{3}$$

(Itt $n=2$ esetén a szögletes zárójelben az utolsó tag utolsó tényezőjén az 1 számot kell érteni.) Tekintsük ezt most az x változó polinomjának, y és z pedig jelentsenek adott különböző egész számokat. Ekkor (3) bal oldala eltűnik az $x=y$ helyen, így a jobb oldal második tényezője is, mert y és z különböző. Ez a tényező egész együtthatós és y is egész, így kiemelhető az $x-y$ tényező és kiemelése után egy egész együtthatós polinom marad vissza.

Ez a polinom eltűnik az $x=z$ helyen, mert (3) bal oldala eltűnik, viszont a jobb oldalon az előző kiemelés után keletkezett $(y-z)(x-y)$ szorzat nem tűnik el, mivel y és z különböző. Így kiemelhető még az $x-z$ tényező is és ismét x egész együtthatós polinomja marad vissza. Ha az így átalakított számlálóban x helyébe is az adott egész értéket helyettesítjük, azt kapjuk, hogy a számláló az $(y-z)(x-y)(x-z)$ szorzatnak egy egész többszöröse, tehát a (2) kifejezés egész szám.

III. megoldás. Jelöljük az (1) kifejezést $P_n(x,y,z)$-vel. Teljes indukcióval fogjuk bizonyítani, hogy ez az x, y, z változók egész együtthatós polinomja.

Az állítás $n=0$-ra igaz, mert $P_0(x,y,z)$ azonosan 0.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n=k$ értékre $P_k(x,y,z)$ egész együtthatós polinom. Kiküszöbölve $P_{k+1}(x,y,z)$-ből és $P_k(x,y,z)$-ből a harmadik tagot a következő azonossághoz jutunk:

$$P_{k+1}(x,y,z)-zP_k(x,y,z)=\frac{x^{k+1}-zx^k}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^{k+1}-zy^k}{(y-x)(y-z)}=\frac{x^k-y^k}{x-y}\,,$$

azaz

$$P_{k+1}(x,y,z)=zP_k(x,y,z)+(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+y^{k-1}), \tag{4}$$

ahol $k=0$-ra a zárójelben álló összeg 0-val helyettesítendő. Ebből azonnal következik, hogy $P_k(x,y,z)$-vel együtt $P_{k+1}(x,y,z)$ is x, y, z egész együtthatós polinomja. Állításunk tehát minden nem negatív egész n-re érvényes.

Megjegyzés. A (4) azonosság mindjárt módot is ad a $P_n(x,y,z)$ polinomok lépésről lépésre történő – úgynevezett rekurzív – meghatározására. Megkaphatjuk ebből $P_n(x,y,z)$ explicit előállítását is, teljes indukcióval bebizonyíthatjuk az I. megoldáshoz fűzött 1. megjegyzés állítását.

IV. megoldás. Az (1) kifejezést tekinthetjük a

$$P_n^{(k)}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\frac{x_1^n}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_k)}+$$
$$+\frac{x_2^n}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_k)}+\ldots+\frac{x_k^n}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})}$$

kifejezések speciális esetének, ha $k=3$. Értelem szerint $P_n(x_1)$-en x_1^n-t értjük. Az alábbi meggondolások erre az esetre is érvényesek. Megmutatjuk, hogy ezek a kifejezések minden k-ra és tetszés szerinti nem negatív egész n-re a változók egész együtthatós polinomjai.

A bizonyítás történhetik a változók számára vonatkozó teljes indukcióval. A $k=1$ értékre

$$P_n^{(1)}(x_1)=x_1^n$$

az x_1 változó egész együtthatós polinomja.

Tegyük fel, hogy ha k valamilyen $l-1$ értékkel egyenlő (ahol $l-1\geq 1$), akkor $P_n^{(l-1)}(x_1\ldots,x_{l-1})$ a változóinak egész együtthatós polinomja. Ekkor képezzük a

$$P_n^{(l-1)}(x_1,\ldots,x_{l-2},x_{l-1})-P_n^{(l-1)}(x_1\ldots,x_{l-2},x_l)$$

kifejezést. Itt az x_i^n számlálójú tag mindkét kifejezésben fellép, ha $l>2$ és $i\leq l-2$, a nevezők pedig egyenlővé válnak, ha az első törtet x_i-x_l-lel, a másodikat x_i-x_{l-1}-gyel bővitjük. Ekkor a számlálóban

$$x_i^n(x_i-x_l)-x_i^n(x_i-x_{l-1})=x_i^n(x_{l-1}-x_l)$$

lesz, tehát a két tört összevonásával az

$$\frac{x_i^n(x_{l-1}-x_l)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{l-1})(x_i-x_l)}$$

tag keletkezik. Az első, ill. második kifejezés utolsó tagját $x_{l-1}-x_l$-lel bővítve így alakítjuk át:

$$\frac{x_{l-1}^n}{(x_{l-1}-x_1)\ldots(x_{l-1}-x_{l-2})}=\frac{x_{l-1}^n(x_{l-1}-x_l)}{(x_{l-1}-x_1)\ldots(x_{l-1}-x_{l-2})(x_{l-1}-x_l)}\,,$$

ill.

$$-\frac{x_l^n}{(x_l-x_1)\ldots(x_l-x_{l-2})}=\frac{x_l^n(x_{l-1}-x_l)}{(x_l-x_1)\ldots(x_l-x_{l-2})(x_l-x_{l-1})}\,.$$

Így a következő azonosságra jutunk, kiemelve a minden tagban közös $(x_{l-1}-x_l)$ tényezőt:

$$P_n^{(l-1)}(x_1,\ldots,x_{l-2},x_{l-1})-P_n^{(l-1)}(x_1,\ldots,x_{l-2},x_l)=(x_{l-1}-x_l)P_n^{(l)}(x_1\ldots,x_l). \tag{5}$$

Itt a bal oldalon $P_n^{(l-1)}(x_1\ldots,x_{l-2},x_{l-1})$ és $P_n^{(l-1)}(x_1,\ldots,x_{l-2},x_l)$ az indukciós feltevés szerint a változók egész együtthatós polinomja; az utóbbi úgy nyerhető az előbbiből, hogy x_{l-1} helyébe x_l-et írunk. Így az egyiket x_{l-1}, a másikat x_l hatványai szerint rendezve a két kifejezésben x_{l-1}, ill. x_l egyenlő hatványainak megegyezik az együtthatója. A különbségben ezeket a közös együtthatókat kiemelve $x_{l-1}^r-x_l^r$ alakú különbségek lépnek fel. Ezek mindegyikéből, s így (5) bal oldalából is kiemelhető az $x_{l-1}-x_l$ tényező. A visszamaradó tényező, ami (5) szerint $P_n^{(l)}(x_1,\ldots,x_l)$-et adja, az $x_1,\ldots,x_l$ változók egész együtthatós polinomja. Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Megjegyzések. 1. A bizonyítást lépésről lépésre követve az is könnyen bizonyítható teljes indukcióval, hogy $P_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)$ az $x_1,\ldots,x_k$ változók hatványaiból képezett összes olyan szorzatok összege, amelyekben a kitevők összege $n-k+1$, ha $n\geq k$; $P_n^{(k)}$ azonosan egyenlő 1-gyel, ha $n=k-1$, ha pedig $n\leq k-1$, akkor 0-val.

2. Az eddigi bizonyítások mindegyike felhasználta az

$$a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

azonosságot. A következő – lényegében Arató Péter dolgozatából származó – megoldásban erre sincs szükség.

V. megoldás. A

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz$$

kifejezés, mint t polinomja nyilván eltűnik a $t=x$, $t=y$, $t=z$ helyeken és ugyanez áll a kifejezés t^n-szeresére is. Így ha t az x, y, z akármelyikét jelenti, azonosan teljesül, hogy

$$t^{n+3}=t^{n+2}(x+y+z)-t^{n+1}(xy+xz+yz)+t^nxyz, \tag{6}$$
$$(t=x,\quad\text{vagy}\quad t=y,\quad\text{vagy}\quad t=z)$$

(ami különben közvetlenül is könnyen belátható).

Jelöljük a feladatban szereplő kifejezést $P_n(x,y,z)$-vel, amint a III. megoldásban is tettük, akkor $P_{n+3}(x,y,z)$ tagjainak számlálójában felhasználva a (6) azonosságokat, a következő azonossághoz jutunk:

$$P_{n+3}(x,y,z)=(x+y+z)P_{n+2}(x,y,z)-(xy+xz+yz)P_{n+1}(x,y,z)+$$
$$+xyzP_n(x,y,z).$$

Ebből látjuk, hogy ha kifejezésünk n három egymásutáni egész értékére a változók egész együtthatós polinomja, akkor ugyanez áll minden nagyobb n egész számra is. Mivel pedig $P_0(x,y,z)=P_1(x,y,z)=0$, $P_2(x,y,z)=1$, így $P_n(x,y,z)$ minden nem negatív egész n-re áz x, y, z változók egész együtthatós polinomja.

Megjegyzés. Az V. megoldás módszerével is bizonyítható a IV. megoldásban szereplő általánosabb állítás tetszés szerinti adott k-ra, csak ekkor $n=0,1,\ldots,k-1$-re kell meghatározni $P_n^{(k)}(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ értékét.