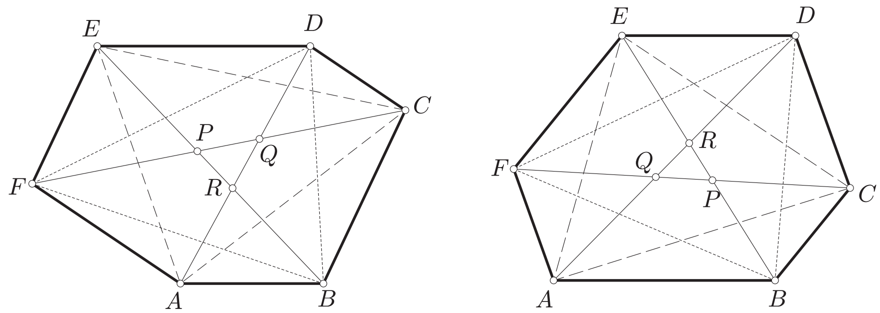
I. megoldás. Húzzuk meg az AD, BE és CF átlókat, metszéspontjaik legyenek R, P, Q (ezek egybe is eshetnek). Ezekkel az ACE, illetőleg a BDF háromszöget a következő háromszögekre bontottuk szét (5. ábra):

$$\begin{array}{llll} ACQ, & CEP, & EAR, & PQR, \\ DFQ, & FBP, & BDR, & PQR. \end{array} \tag{1}$$



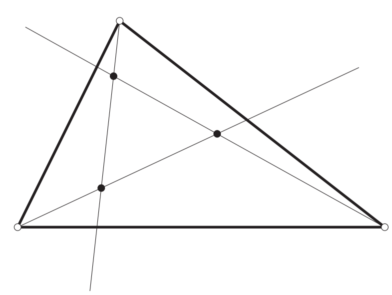
5. ábra

A feladat állításának bizonyításához elegendő azt megmutatni, hogy itt az egymás alatt álló háromszögek területe egyenlő. Ez az utolsó párra nyilvánvaló. Az első párra ez abból következik, hogy az ACF és ADF háromszögek egyenlő területűek, mert AF oldaluk közös és a rá merőleges magasság AF és CD párhuzamossága folytán egyenlő. Ezekből elhagyva közös részüket, az AQF háromszöget, a maradó ACQ és DFQ háromszögek is egyenlő területűek. Ugyanigy látható be a további két-két háromszög területének egyenlősége is. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. A megoldás épít arra a szemléletes tényre, hogy az (1) alatti háromszögek az ACE, ill. BDF háromszöget töltik ki hézagtalanul és egyrétűen. Ez azonban a szemléletre való hivatkozás nélkül is belátható.

A meghúzott AD, BE és CF átlók egyenese átmetszi az ACE és BDF háromszögeket, mert a hatszög konvex volta miatt az AD egyenesnek pl. a B és C csúcsok az egyik oldalán, az E és F csúcsok az ellenkező oldalán vannak, s így metszi az egyenes a CE és FB szakaszt, tehát az említett háromszögeket is. Ezeknek az átlóknak a metszéspontjai is az említett háromszögekben vannak, mert véve valamelyik átlón az egyik háromszögnek az átlóra eső csúcsát és a szemközti oldallal való metszéspontot, ezeket is elválasztja a másik két átló.

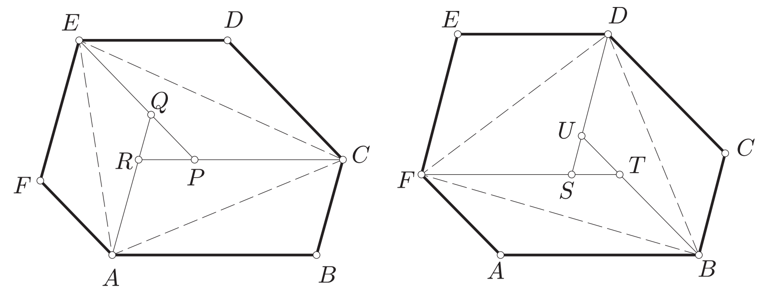
Ha a három átló egy ponton megy keresztül, akkor nincs mit bizonyítanunk tovább. Ellenkező esetben pl. az A, C, E csúcsok a PQR háromszög QR, PQ, RP oldalainak meghosszabbításain vannak. Nem lehet pl. az A csúcs az RQ oldal Q-n túli és ugyanakkor az E csúcs az RP oldal P-n túli meghosszabbításán, mert akkor a PQR háromszög a PQ oldal ellenkező oldalán lenne, mint az ACE háromszög, nem lehetne tehát az előbbi háromszög az utóbbiban. Így A, C, E QR-nek az R-en túli, PQ-nak Q-n, ill. RP-nek P-n túli meghosszabbításán van, vagy mindegyik a megfelelő oldal ellenkező irányú meghosszabbításán (5. ábra). Ebből pedig következik bizonyítandó állításunk. Hasonló meggondolás érvényes a BDF háromszögre is.



6. ábra

A bizonyított állítást így fogalmazhatjuk: *Egy háromszög csúcsain át húzzunk a háromszöget metsző egyeneseket és tekintsük az ezek közti háromszöget, – ha a három egyenes nem megy át egy ponton. Ekkor az első háromszög csúcsai az utóbbi három oldalának három különböző csúcsból induló meghosszabbításain vannak* (6. ábra, az első háromszög csúcsai üres, az utóbbiéi tele köröcskékkel vannak jelölve).

II. megoldás. Egészítsük ki paralelogrammává egyrészt a hatszög AB és BC, CD és DE, továbbá EF és FA oldalát, másrészt a BC és CD, DE és EF, FA és AB oldalpárokat. A paralelogrammák negyedik csúcsait jelöljük R, P, Q-val, ill. U, S, T-vel. (A három-három pont egybe is eshet.) A paralelogrammáknak két-két hatszögcsúcsot összekötő átlói az ACE, ill. a BDF háromszög oldalai (7. ábra).



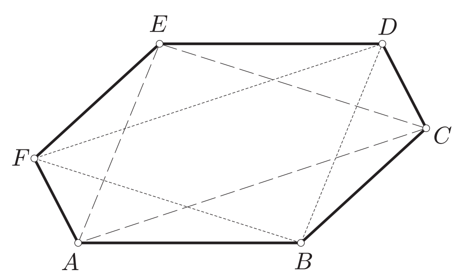
7. ábra

Mind a két paralelogramma-rendszerben két-két paralelogrammának a közös csúcsból induló oldalegyenese egybeesik, mivel párhuzamosak a hatszögnek azok az oldalai, amelyekkel a szóban forgó paralelogrammaoldalak párhuzamosak.Így a PQR és az STU háromszögek oldalai (ha a három pont nem esik egybe) két-két hatszögoldallal párhuzamosak, és hosszuk a párhuzamos hatszögoldalak hosszának a különbsége. A két háromszög tehát egybevágó. Ebből következik, hogy a három-három paralelogramma területösszege egyenlő. Ennek folytán az ACE háromszög területe is, a BDF-é is a megfelelő három paralelogramma fél területének és a köztük levő háromszög területének az összege, s így a kettő egyenlő.

Megjegyzések. a) A bizonyítás ismét szigorúbbá tehető azzal, ha megmutatjuk, hogy a három-három félparalelogramma és az ezek oldalai között keletkező háromszög hézagtalanul és egyrétűen töltik ki az ACE, ill. BDF háromszöget. Itt pl. az ACE háromszöget az AQ, CR, EP egyenesekkel osztottuk részekre. Ezek az egyenesek átmetszik a háromszögeket, mert pl. AQ párhuzamos BC-vel és EF-fel, és az utóbbi két egyenes AQ ellenkező oldalára esik a hatszög konvex volta miatt. Hasonlóan okoskodhatunk a többi egyenesekre, továbbá a BDF háromszögre. Ekkor azonban a keletkezett ábrákra is érvényes az előző megoldáshoz fűzött megjegyzés utolsó megállapítása, abból pedig következik a bizonyítandó állítás.

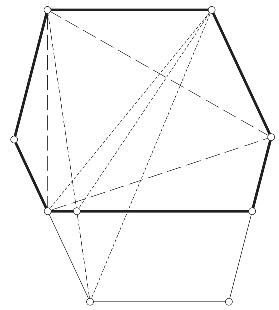
b) A bizonyítás azt adja, hogy a feladatban szereplő háromszögek területe a hatszög és a PQR (ill. a vele egybevágó STU) háromszög területének számtani közepe, hogy tehát *az ACE és BDF háromszögek területe legalább akkora, mint a hatszög területének a fele.* Ebből egyszersmind következik, hogy *a szomszédos oldal párok alkotta háromszögek közül legalább az egyik területe nem nagyobb a hatszög területének hatodrészénél.* (Sőt ez az ABC, CDE, EFA, továbbá a BCD, DEF, FAB háromszögek közül legalább egy-egyre teljesül.) Felvetődik az a kérdés, hogy nem érvényes-e a második állítás minden konvex hatszögre. A kérdésre egyelőre nem ismeretes a válasz.

III. megoldás. Ha pl. az AB és DE oldalak egyenlők, akkor az $ABDE$ négyszög paralelogramma és így az AEF és DBC háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, továbbá AE és DB egyenlősége folytán egyenlők is, tehát a hatszög párhuzamos oldalai egyenlők is (8.ábra). Ebből az AE és DB oldalak egyenlőségéhez hasonlóan következik, hogy az ACE és DFB háromszög megfelelő oldalai egyenlők, tehát a két háromszög egybevágó.



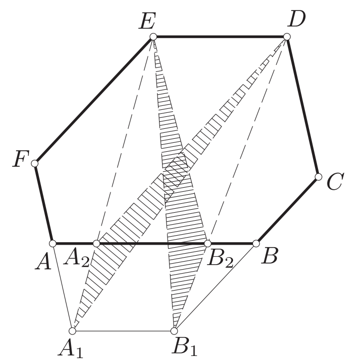
8. ábra

Ha a szemközti oldalak különböző hosszúságúak, akkor vizsgáljuk meg, hogyan változik a feladatban szereplő háromszögek területe, ha pl. az AB oldalt eltoljuk, irányát megtartva, a hatszöggel ellenkező oldalra, de úgy, hogy ne érje el az AF és BC egyenesek metszéspontját. Az eltolt oldal legyen A_1B_1. Az ACE háromszög ugyanannyival változik, mint a változatlanul maradó CDE háromszög hozzácsatolásával keletkező $ACDE$ négyszög (9. ábra). Ezt az AD átlóval kettévágva az ACD és ADE háromszögek területének változását vizsgáljuk. Az ACD és A_1CD háromszög területe egyenlő, mert $AA_1\|CD$. Jelöljük másrészt AB és A_1E metszéspontját A_2-vel, akkor az ADE és az A_2DE háromszög területe egyenlő, mert $AA_2\|DE$. Így az $ACDE$ négyszög – és vele együtt az ACE háromszög – területe az A_1DE és A_2DE háromszög területének különbségével, vagyis az A_1DA_2 háromszög terültével nő. Ugyanígy látható – AB és B_1D metszéspontját B_2-vel jelölve –, hogy a BDF háromszög területe a B_1EB_2 háromszög területével nő.



9. ábra

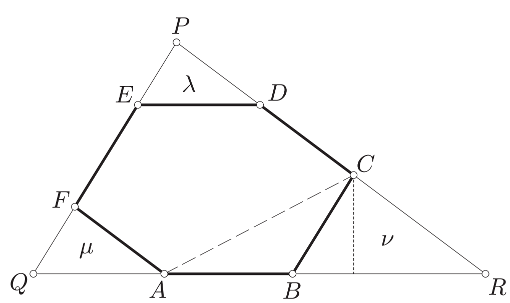
Az A_1DA_2 és B_1EB_2 háromszögek azonban egyenlő területűek (10. ábra), mert úgy származtathatók, hogy az A_1DE háromszögből A_2DE-t, ill. B_1DE-ből B_2DE-t elhagyjuk, és itt a kisebbítendők $A_1B_1\|DE$ folytán, a kivonandók pedig $A_2B_2\|DE$ folytán egyenlők. Az ACE és BDF háromszög területe tehát ugyanannyival változik.



10. ábra

Tegyük most fel, hogy $AB > DE$ (ellenkező esetben AB és DE szerepét felcseréljük). Úgy mozdítsuk el AB-t, hogy $A_1B_1 = DE$ legyen. Ekkor tudjuk, hogy A_1CE és B_1DF egyenlő területű, ACE és BDF pedig ezektől egyenlő területekkel különböznek, tehát szintén egyenlő területűek. Ezt kellett bizonyítanunk.

IV. megoldás. Egészítsük ki a hatszöget az AB, CD, EF oldalak meghosszabbításával egy PQR háromszöggé (11. ábra). Ezt a háromszöget és a területét is jelöljük T-vel. A hatszöget T-ből a hozzá hasonló PED, FQA és CBR háromszögek levágásával kapjuk. Ezekben az oldalak legyenek T oldalainak; λ-szorosai, μ-szörösei, ill. ν-szörösei.



11. ábra

Az ACE háromszöget T-ből az ARC, CPE és EQA háromszögek lemetszésével kapjuk. Az elsőnek AR oldala a QR oldal $1 - \mu$-szöröse, magassága pedig – mint a CBR háromszög C-ből húzott magassága – a T háromszög P-ből QR-re bocsátott magasságának ν-szöröse. Így a háromszög területe $(1 - \mu)\nu T$. Hasonlóan számítva a másik két háromszög területét is a következő területegyenlőséget kapjuk:

$$ACE = T - (1-\mu)\nu T - (1-\nu)\lambda T - (1-\lambda)\mu T =$$
$$= T(1 - \lambda - \mu - \nu + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda).$$

A BDF háromszögre hasonlóan számolva azt nyerjük, hogy

$$BDF = T - (1-\lambda)\nu T - (1-\mu)\lambda T - (1-\nu)\mu T =$$
$$= T(1 - \lambda - \mu - \nu + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda),$$

tehát
$$ACE = BDF.$$

V. megoldás. A feladat megoldása nem igényel különösebb ötletet, ha koordinátageometriát alkalmazunk. Válasszuk meg a koordinátatengelyeket úgy, hogy az y-tengely ne legyen párhuzamos a hatszög egyik oldalával sem. Ekkor az oldalak iránytangense létezik. Az A, B, C, D, E, F pontok koordinátáit jelöljük sorra $(x_1, y_1), \dots, (x_6, y_6)$-tal.

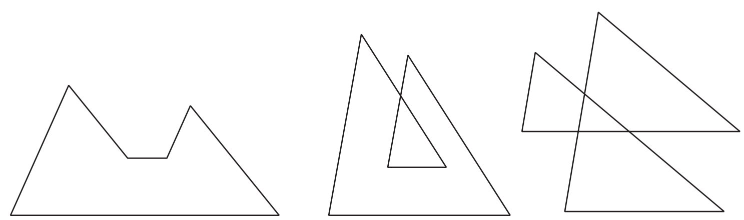
Azt tudjuk, a szemközti oldalpárok párhuzamosak, tehát iránytangenseik különbsége 0:

$$\frac{y_1 - y_6}{x_1 - x_6} - \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha közös nevezőre hozás után a számlálók értéke, és így ezek összege is 0. Rendezzük ezt az összeget az x-ek szerint:

$$\begin{gathered}0 = (x_4 - x_3)(y_1 - y_6) - (x_1 - x_6)(y_4 - y_3) + (x_6 - x_5)(y_3 - y_2) - \\ -(x_3 - x_2)(y_6 - y_5) + (x_2 - x_1)(y_5 - y_4) - (x_5 - x_4)(y_2 - y_1) = \\ = x_1(y_3 - y_5) + x_2(y_6 - y_4) + x_3(-y_1 + y_5) + x_4(-y_6 + y_2) + \\ +x_5(-y_3 + y_1) + x_6(y_4 - y_2).\end{gathered}$$

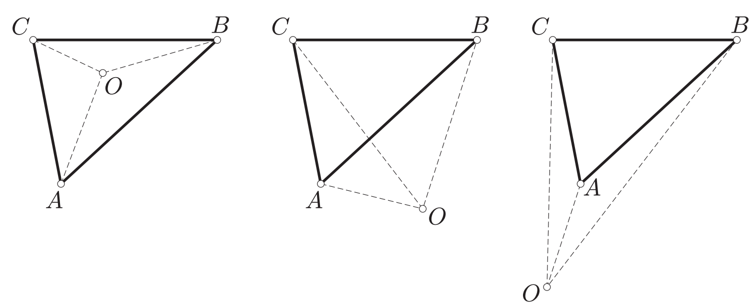
a maradó első, harmadik és ötödik tag összege az ACE háromszög kétszeres területét adja, a második, negyedik és hatodik pedig negatív elő jellel a BDF háromszög kétszeres területét. A két háromszög területe tehát egyenlő, és ezt kellett bizonyítanunk.



12. ábra

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a bizonyítás egyedül a szemközti oldalak párhuzamosságát használja fel, tehát a hatszög konvex voltát nem, sőt még akkor is helyes marad, ha az oldalak egymást (a csúcsoktól különböző pontokban) átmetszik. (Néhány ilyen hatszöget mutat a 12. ábra.) Másrészt a háromszögek területét a használt képlet előjellel adja, tehát a bizonyítás azt is adja, hogy az ACE és BDF háromszögek körüljárása is mindig megegyezik. Erre az általánosabb állításra adunk most egy koordinátákat nem használó bizonyítást is.

VI. megoldás. Egy ABC háromszög területét tekintsük pozitívnak vagy negatívnak aszerint, amint a háromszöget a csúcsok megadott sorrendje szerint körüljárva az óra járásával ellentétes vagy azzal egyező irányban haladunk.



13. ábra

Könnyen látható, hogy az ABC háromszög síkjának egy tetszés szerinti O pontjára (13. ábra) – háromszögek előjeles területét ugyanúgy jelölve, mint magát a háromszöget – fennáll a következő összefüggés:

$$ABC = OAB + OBC + OCA. \tag{2}$$

Ha valamelyik három pont egy egyenesre esik, akkor a keletkező egyenesszakasszá fajult „háromszög” területén természetesen 0-t értünk. Ezt felhasználva választunk az adott hatszög síkjában egy O pontot, és minden háromszöget olyan háromszögekből teszünk össze, amelyeknek egyik csúcsa O.

Előjeles területekre is igaz, hogy ha az ABC és ABD háromszögek C és D csúcsát összekötő egyenes párhuzamos az AB oldallal, akkor a két háromszög területe egyenlő, mert az abszolút értékekről tudjuk ezt, de a körüljárás sem változhat meg, ha egy csúcsot a szemközti oldallal párhuzamosan mozdítunk el.

Ha tehát $ABCDEF$ egy olyan hatszög, amelyben $AB\|DE$, $BC\|EF$ és $CD\|FA$, akkor az ABE és ABD, a CDA és CDF és az EFC és EFB háromszögek területe egyenlő, tehát (2)-t alkalmazva

$$OAB+OBE+OEA=OAB+OBD+ODA,$$
$$OCD+ODA+OAC=OCD+ODF+OFC,$$
$$OEF+OFC+OCE=OEF+OFB+OBE.$$

Itt az első oszlopban a jobb és bal oldalon ugyanazok a háromszögek állnak, a bal második oszlopban pedig azok, mint a jobb harmadik oszlopban, csak más sorrendben így a három egyenlőséget összeadva és az egyenlő tagokat a két oldalon elhagyva azt kapjuk, hogy

$$OEA+OAC+OCE=OBD+ODF+OFB,$$

amiből (2) alapján

$$EAC=BDF,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

VII. megoldás. Megoldható a feladat vektorok segítségével is. Ehhez a vektorok vektoriális szorzatát fogjuk felhasználni és annak következő tulajdonságait.[4]

Az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$ vektorok vektoriális szorzatán – amit $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$-sel jelölünk – azt a vektort értjük, amelynek hossza az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$ vektorokból alkotható paralelogramma területének a mérőszámával egyenlő, amely merőleges az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$ síkjára és annak arra az oldalára mutat, amelyikről nézve $\mathbf{r}$-t pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányban lehet 180°-nál kisebb szöggel $\mathbf{s}$-re ráforgatni.

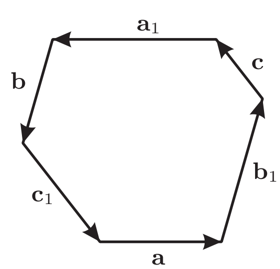
Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata 0-vektort ad.

Egy vektoriális szorzat két tényezőjét felcserélve a szorzat előjelet vált.

A vektoriális szorzatra érvényes a disztributív tulajdonság, vagyis bármely három $\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}$ vektorra fennállnak az

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{s}+\mathbf{t})=\mathbf{r}\times\mathbf{s}+\mathbf{r}\times\mathbf{t}\quad\text{és}\quad(\mathbf{s}+\mathbf{t})\times\mathbf{r}=\mathbf{s}\times\mathbf{r}+\mathbf{t}\times\mathbf{r}$$

azonosságok.



14. ábra

Ezeket felhasználva azt fogjuk bebizonyítani, hogy a hatszögből az ACE háromszög oldalai által lemetszett háromszögek területösszege és a BDF háromszög oldalaival lemetszetteké egyenlő. A 14. ábrán feltüntetett jelöléseket használva az előbbi összeg kétszeresét az

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b_1}+\mathbf{b}\times\mathbf{c_1}+\mathbf{c}\times\mathbf{a_1}$$

vektor képviseli, az utóbbi kétszeresét pedig a

$$\mathbf{c_1}\times\mathbf{a}+\mathbf{a_1}\times\mathbf{b}+\mathbf{b_1}\times\mathbf{c}$$

összeg. Ha a hatszög konvex, akkor mind a hat vektor a síkjának ugyanarra az oldalára mutat. Ezek különbségéről kell belátnunk, hogy az 0.

A különbséget úgy fogjuk képezni, hogy a második sor összeadandóinak a tényezőit felcseréljük. Ha még ehhez az összeghez $\mathbf{a}\times\mathbf{a_1}+\mathbf{b}\times\mathbf{b_1}+\mathbf{c}\times\mathbf{c_1}$-et adunk, ezzel az összeg értékét nem változtattuk meg, mert párhuzamos vektorok szorzatait adtuk hozzá. Elegendő tehát a következő kifejezésről megmutatni, hogy a 0-vektorral egyenlő:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b_1}+\mathbf{b}\times\mathbf{c_1}+\mathbf{c}\times\mathbf{a_1}+\mathbf{a}\times\mathbf{c_1}+\mathbf{b}\times\mathbf{a_1}+\mathbf{c}\times\mathbf{b_1}+\mathbf{a}\times\mathbf{a_1}+$$
$$+\mathbf{b}\times\mathbf{b_1}+\mathbf{c}\times\mathbf{c_1}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a_1}+\mathbf{b_1}+\mathbf{c_1}).$$

[4] Lásd pl. Feldmann L., Vektoralgebra (Középiskolai szakköri füzet) 20–27. o.

Azonban zárt hatszögről lévén szó

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{a_1}+\mathbf{b_1}+\mathbf{c_1}=\mathbf{0},$$

vagyis az első három vektor összege a második hároménak negatívja, azzal tehát párhuzamos, és így vektori szorzatuk 0. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. Ennél a megoldásnál látszólag ismét kihasználtuk a hatszög konvex voltát. Belátható azonban, hogy előjeles területtel számolva minden hatszögnek (és minden zárt sokszögnek) tulajdoníthatunk területet, az $ABCDEF$ hatszögnek pl. az $ABC+ACD+ADE+AEF$ területösszeget. Ez nem változik meg azáltal, ha A helyett egy másik csúcsból kiinduló átlóival bontjuk háromszögekre a hatszöget. Az ACE háromszöget az ABC, CDE, EFA háromszögek (előjeles) területei a hatszög így értelmezett területére „egészítik ki", és hasonlóan BDF-et a BCD, DEF, FAB háromszögek. Végül a felírt vektori szorzatok tetszőleges hatszög esetén a megfelelő háromszögek előjeles területeit képviselik. Ezek végiggondolásával adódik, hogy az utolsó bizonyítás is kiadja az állítást bármilyen hatszögre, amelynek a szemközti oldalai párhuzamosak.