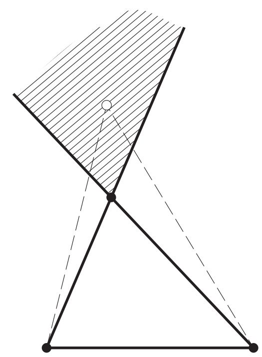
A feladat állítása a következővel egyértelmű: van olyan 3 pont, amelyek valamelyikéből a másik kettőn át húzott félegyenesek hajlásszöge legalább 120°-os. Ebben a formában fogjuk bizonyítani az állítást.

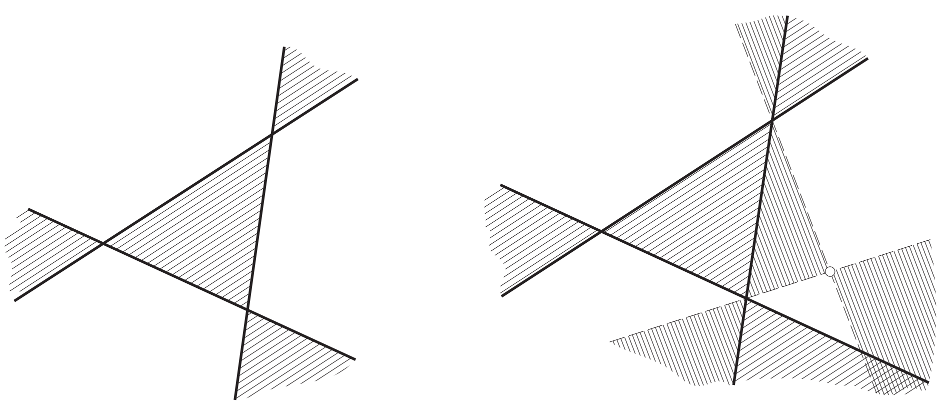
I. megoldás. A következő segédtételből indulunk ki. Ha egy háromszög belsejében adva van egy P pont, akkor a P-ből a csúcsokhoz húzott egyenesek hajlásszögének valamelyike legalább 120°-os. Valóban, véve a három szög legnagyobbikát (illetőleg az ilyenek egyikét), ennek a háromszorosa legalább akkora, mint a három szög összege, vagyis legalább 360°, ez a szög tehát legalább 120°-os.

Ebből következik, hogy a feladat állítása teljesül minden olyan esetben, amelyben kiválaszthatók az adott pontok közül egy háromszög csúcsai úgy, hogy ez a háromszög tartalmazzon adott pontot.



1. ábra

Válasszunk ki most már az adott 6 pont közül hármat. Ha abban a háromszögben amelynek ezek a csúcsai, van még adott pont, akkor, mint láttuk, teljesül a feladat állítása; de teljesül akkor is, ha a háromszög két oldalának a közös csúcsukon túli meghosszabbításai közt levő szögtartományba esik adott pont (1. ábra), mert akkor a kérdéses csúcsot tartalmazza az a háromszög, amelyet a másik két csúcs és a negyedik pont határoz meg. A síkot a háromszög oldalegyeneseivel felosztva feltehetjük tehát, hogy a további adott pontok a háromszög oldalaihoz csatlakozó síkrészekben helyezkednek el. Hozzávéve közülük egyet a már kiválasztottakhoz, a tekintetbe vett pontok egy konvex négyszög csúcsai (2. ábra).



2. ábra

Meghúzva a négyszög még hiányzó két oldalának egyenesét, ismét feltehetjük, hogy sem a keletkező új háromszögbe, sem pedig az oldalmeghosszabbítások közti szögtartományokba nem esik adott pont. Így véve egy ötödik pontot az az előzőkkel konvex ötszöget alkot, és a gondolatmenetet még egyszer megismételve nyerjük, hogy elég azt az esetet megvizsgálni, amelyben az adott pontok egy konvex hatszög csúcsai. Ebben az esetben a hatszög legnagyobb szögének, vagy a legnagyobbak egyikének a hatszorosa legalább akkora, mint a hat szög összege, tehát legalább 720°, s így a szög legalább 120°-os. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

II. megoldás. Az adott pontok vagy egy konvex hatszög csúcsai, vagy közülük 3, 4 vagy 5 egy olyan konvex sokszög csúcsait alkotja, amely tartalmazza a többi adott pontot. Az így kapott hat–, ill. három–, négy– vagy ötszöget az adott pontok *konvex burká*nak nevezzük.[1]

Ha a konvex burok hatszög, akkor, mint az előző megoldás végén láttuk, egyik szöge legalább 120°-os.

Ha a konvex burok négy–, vagy ötszög, akkor egyik átlójával, ill. egyik csúcsából induló átlóival háromszögekre bontjuk. A keletkező háromszögek valamelyike tartalmaz adott pontot. A hátralevő esetek mindegyikében találunk

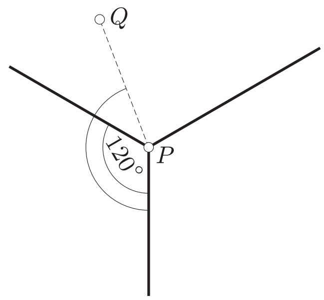
[1]Képzeljünk a pontokban a síkra merőlegesen gombostűket betűzve és vegyük körül ezeket cérnával, majd húzzuk össze a cérnát a legrövidebbre, ekkor a cérna megadja a konvex burkot.

tehát olyan háromszöget, amelynek a csúcsai adott pontok és amely tartalmaz ezeken kívül is adott pontot. Az előző megoldás elején láttuk, hogy ekkor a csúcsokat a további adott ponttal összekötő szakaszok közti szögek valamelyike legalább 120°-os. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzések. a) Nem lényeges annak kikötése, hogy semelyik 3 pont sincs egy egyenesen, ha ugyanis 3 pont egy egyenesen van, akkor a középsőből a két szélsőhöz húzott félegyenesek 180°-os (tehát 120°-nál nagyobb) szöget zárnak be.

b) Vizsgáljuk meg, előfordulhat-e, hogy az adott pontok mindegyikét minden lehető módon összekötve két-két másikkal, a keletkező forgásszögek legnagyobbika sem nagyobb 120°-nál, és ha igen, milyen esetekben következik ez be. A bizonyításból azonnal adódik, hogyha a 6 pont konvex burka hatszög, akkor a kérdéses legnagyobb szög akkor 120°-os, ha a hatszög minden szöge egyenlő, vagyis, ha az oldalai rendre párhuzamosak egy szabályos hatszög oldalaival (nem kell azonban szabályosnak lennie a hatszögnek, mint azt több versenyző állította).

Ha az adott pontok konvex burka nem hatszög, akkor láttuk, hogy kiválaszthatók a pontok közül egy olyan háromszög csúcsai, amely tartalmaz legalább még egy adott P pontot. A bizonyításból világos az is, hogy P-ből a háromszög oldalainak 120°-os szögben kell látszaniuk, mert különben valamelyik biztosan 120°-nál nagyobb szög alatt látszik.

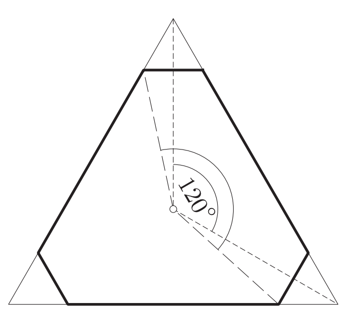


3. ábra

Ha teljesül is ez a feltétel, akkor is fellép 120°-nál nagyobb szög, amint legalább még egy Q pont van adva (3. ábra). Ha ugyanis Q a P-ből a csúcsokhoz mutató félegyenesek valamelyikén van, akkor arra 3 pont esik, és így van 180°-os szög is. Ha pedig Q az említett félegyenesek közti 120°-os szögtartományok belsejében van, akkor a P-ből Q-n át húzott félegyenes a szögtéren kívül levő félegyenessel 120°-nál nagyobb szöget zár be. Ezzel bebizonyítottuk a következőt: *hat adott pont mindegyikéből minden két-két ponthoz húzott félegyenes-párok közötti szögek legnagyobbika legalább akkora, mint a szabályos hatszög egy szöge, és csak abban az esetben pontosan akkora, ha az adott pontok egy olyan konvex hatszög csúcsai, amelynek az oldalai párhuzamosak egy szabályos hatszög oldalaival.*

c) A most kimondott állítás 6 helyett 3, 4 vagy 5 pont esetére is igaz. Ha ugyanis mindegyik pont csúcsa a pontrendszer konvex burkának, akkor a sokszög legnagyobb szöge legalább akkora, mint a szabályos három–, négy–, ill. ötszög egy szöge, és pontosan ekkora csak úgy lehet, ha a sokszög minden szöge ekkora, vagyis ha oldalai párhuzamosak egy ugyanennyi oldalú szabályos sokszög oldalaival. Ha pedig (4 vagy 5 adott pont esetén) van olyan pont, amelyik nem csúcsa a konvex buroknak, akkor egy ilyen pont körül, mint már láttuk, fellép legalább 120°-os szög, viszont a szabályos négy– és ötszög egy szöge kisebb 120°-nál.

Megmutatjuk, hogy a most belátott szabályosság 7 adott pont esetén már nem áll fenn: *a síkban 7 pont közül valamelyiket össze tudjuk kötni két másikkal úgy, hogy 120°-nál nagyobb szög keletkezzék, viszont bárhogy adunk meg egy 120°-nál nagyobb szöget, mindig megadható 7 pont úgy, hogy a köztük fellépő összes szögek kisebbek legyenek az adott szögnél.* Hozzátesszük, hogy az utoljára említett pontrendszerek már nem lesznek általában konvex 7-szög csucsai.



4. ábra

Ha a 7 pont konvex burka 7-nél kevesebb oldalú, akkor az állítás első része következik a *b)* pontban bizonyított állításból. Ha pedig az adott pontok egy konvex 7-szög csúcsai, akkor ennek legnagyobb szöge legalább akkora, mint a szabályos 7-szög egy szöge, ez pedig nagyobb mint 120°. Az állítás második felének igazolására vágjuk le egy szabályos háromszög csúcsait a csúcsokhoz közel a szemközti oldallal párhuzamos egyenessel, és az így keletkező hatszög csúcsaihoz vegyük hozzá a háromszög középpontját (4. ábra). Ekkor könnyen beláthatjuk, hegy a fellépő legnagyobb szög is tetszés szerint közel lesz $120°$-hoz.

d) Az elmondott eredmények **L. M. Blumenthal** amerikai matematikustól származnak.[2] Ő vetette fel általában a kérdést, hogy milyen alsó korlátot lehet megadni tetszés szerinti n pont esetén a fellépő legnagyobb szögre. **Szekeres György** megmutatta,[3] hogy ha a pontok egy síkban vannak és számuk 2^k (k természetes szám), akkor az $\left(1-\frac{1}{k}\right)180°$-os szög játszik hasonló szerepet, mint 7 pont esetén a $120°$, és térben is nyert hasonló eredményeket. Még síkban sincs azonban minden n-re megoldva a probléma.

[2] Journal of the American Mathematical Society, 61, (1939), 912–922. o.

[3] Ugyanott, 63, (1941), 208–210. o.