Az $ABC\Delta$ síkjának P pontjában a síkra merőleges egyenest állítunk, és ezen az egyenesen egy D pontot veszünk fel. Vizsgáljuk, mitől függ az, hogy D megválasztható-e a feladat kívánalmának megfelelően, úgy tehát, hogy az ABD, BCD, CAD háromszögek mindegyike hegyesszögű legyen.

Először e háromszögeknek az $ABC\Delta$ oldalain nyugvó szögeit tekintjük, és közülük pl. a $BAD\sphericalangle$-et vizsgáljuk. E szög akkor és csak akkor hegyes, ha D az A-ban AB-re merőlegesen emelt síknak ugyanazon az oldalán van, mint a B pont. Ez a kikötés a P-ben emelt merőlegesnek vagy minden pontjára teljesül, vagy egyikre sem, hiszen ez az egyenes párhuzamos a mondott síkkal. Így tehát csak P megválasztásától függ az, hogy a most vizsgált hat szög hegyes-e. Ez akkor és csak akkor következik be a P-ben emelt merőleges minden D pontjára, ha magára P-re is teljesül, ha tehát a

$$BAP\sphericalangle,\quad ABP\sphericalangle,\quad CBP\sphericalangle,\quad BCP\sphericalangle,\quad ACP\sphericalangle,\quad CAP\sphericalangle$$

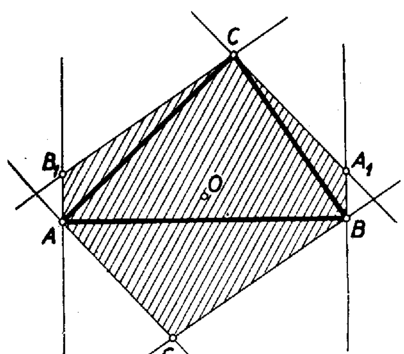
mindegyike hegyes szög.

Most az ABD, BCD, CAD háromszögek D csúcsú szögeit vizsgáljuk. Tudjuk, hogy a síkban egy pontból egy szakasz akkor látható hegyes szögben, ha a pont a szakasz Thales-körén kívül van. A három vizsgált szög tehát akkor hegyes szög, ha D messzebb van az $ABC\Delta$ három oldalának felezőpontjától, mint e három oldal hosszának fele. Ilyen D pont mindig van a P-ben emelt merőleges egyenesen, bárhogyan választjuk is meg a P pontot, hiszen elég pl. azt megkövetelni, hogy D messzebb legyen az ABC síktól, mint az $ABC\Delta$ oldalai leghosszabbikának a fele.

Az elmondottakból következik, hogy a feladat kérdésére felelünk, ha azoknak a P pontoknak a mértani helyét állapítjuk meg, amelyekre a fentebb felsorolt hat szög mindegyike hegyes.

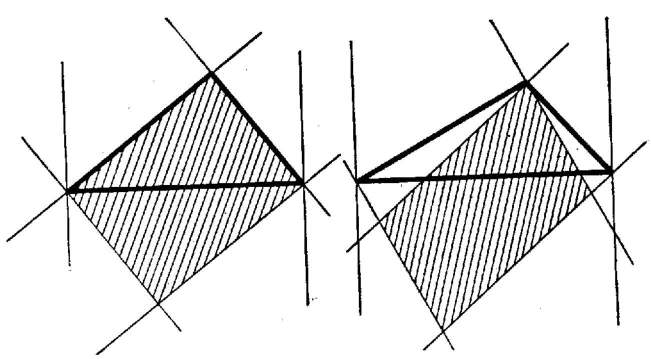
A $BAP\sphericalangle$ és $ABP\sphericalangle$ mindegyike akkor és csak akkor hegyes, ha P annak a síksávnak belsejében van, amelyet az A, B pontokban AB-re emelt merőlegesek határolnak. Ez abból következik, hogy pl. a $BAP\sphericalangle$ akkor hegyes, ha P az A-ban emelt merőlegesnek ugyanazon az oldalán van, mint a B pont. A keresett mértani hely ezek szerint három síksáv belsejének közös részeként adódik, s e síksávokat az $ABC\Delta$ oldalaira végpontjaikban emelt merőlegesek határolják.

Ha hegyesszögű $ABC\Delta$-ből indulunk ki, akkor a három sáv közös részeként hatszög adódik (lásd 1. ábra), s a keresett mértani hely e hatszög belseje.



1. ábra

Megjegyzések. 1. Ha az $ABC\Delta$ nem hegyesszögű, akkor a szerepeltetett síksávok közös része nem hatszög, hanem parallelogramma, és e parallelogramma belseje adja a vizsgált mértani helyet. A 2. ábra derékszögű és tompaszögű háromszög esetében mutatja be ezt a mértani helyet.


2. ábra

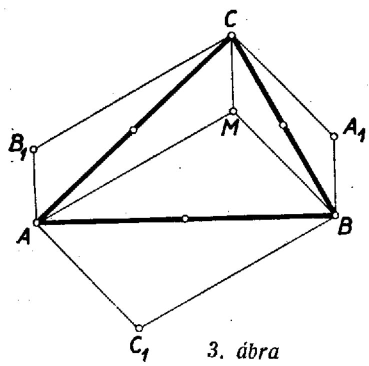
2. Hegyesszögű háromszög esetében akkor is beláthatjuk, hogy mértani helyként valóban hatszög adódik, ha az ábra szemléletére nem támaszkodunk.

Evégből először azt állapítjuk meg, hogy a szereplő síksávok mindegyike szimmetrikus a háromszög köré írt kör O középpontjára vonatkozólag, hiszen ez a pont a sávok középvonalain, az oldalak felező merőlegesein helyezkedik el. Ebből következik, hogy a három sáv közös része is szimmetrikus ugyanerre a pontra vonatkozólag.

A BC és CA szélességű sávok közös része egy C csúcsú parallelogramma, hiszen ez a két sáv nem párhuzamos egymással. Minthogy az $ABC\Delta$ hegyesszögű, C a harmadik, AB szélességű sáv belsejében van, és ezért C a három sáv közös részének is csúcsa. Hasonló indokolással ugyanezt az A és B pontokról is elmondhatjuk.

Az O-ra vonatkozó centrális szimmetriából következik tehát, hogy az A, B, C pontoknak O-ra vonatkozó tükörképei, az A_1, B_1, C_1 pontok, ugyancsak szerepelnek a közös rész csúcsai között. Az A, B, C, A_1, B_1, C_1 pontok mind különbözők, mert O nem azonos az $ABC\Delta$ oldalai egyikének felezőpontjával, valamint egyik csúcsával sem. Több csúcsa a közös részként adódó sokszögnek nem lehet, mert a három sávnak együttesen hat határegyenese van, és ezért a közös résznek hatnál több oldala nem lehet. A közös rész ezek szerint valóban hatszög.

3. Az A_1, B_1, C_1 pontokhoz nemcsak úgy juthatunk el, hogy az A, B, C pontokat az O pontra vonatkozólag tükrözzük, hanem úgy is, hogy az $ABC\Delta$ M magasságpontját tükrözzük az oldalak felezőpontjaira vonatkozólag. (3. ábra)



3. ábra

Ez abból következik, hogy ha M jelöli a C_1 pontnak az AB oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképét, akkor AC_1BM parallelogramma. Ezért AM és BM is merőlegesek a BC, ill. AC oldalakra, M tehát két magasságvonal metszéspontja, azaz a magasságponttal azonos.

A most belátott tényből következik, hogy hatszögünk területe az $ABC\Delta$ területének kétszerese, hiszen e háromszögön túlnyúló részei egybevágók az AMB, BMC, CMA háromszögekkel, és ezek együttesen az $ABC\Delta$-et alkotják.

4. A feladat megoldása módot nyújt 4 olyan pont meghatározására, amelyek közül akárhogyan választunk is ki hármat, mindig egy hegyesszögű háromszög három csúcsához jutunk. Megemlítjük, hogy senkinek sem sikerült eddig feleletet adni arra a kérdésre, vajon 4 helyett legfeljebb hány ilyen tulajdonságú pontot lehet megadni.