I. megoldás. Legyen A olyan résztvevő, akinél több győzelmet senki sem aratott. Ha A nem felelne meg a feladat követelményének, akkor volna olyan B versenyző, akit sem A, sem az A által legyőzöttek nem győztek le, aki tehát mindezeket megverte, s így legalább eggyel több győzelmet aratott, mint A. Ez azonban lehetetlenség, mert A-nál több győzelmet senki sem aratott, ezért A megfelel a feladat követelményének.

II. megoldás. Legyen A_1 a versenyzők egyike. Ha az A_1 által a feladat előírása szerint végzett felsorolásban nem szerepel minden más versenyző, akkor jelöljük az általa nem említett versenyzők összességét H_1-gyel. Minthogy A_1 ezeket nem említette, mindegyikük megverte A_1-et és az A_1 által legyőzötteket. Ezért a H_1 csoport minden tagja megemlíti az A_1 által említetteket, ha az előírt felsorolást elvégzi. Legyen A_2 egy tagja a H_1 csoportnak. Ha A_2 felsorolásában nem szerepel minden más versenyző, akkor tehát a nem említettek mind H_1-be tartoznak, s ezek összességét H_2-vel jelöljük. Mivel A_2 ezeket nem említette, mindegyikük megverte A_2-t és az A_2 által legyőzötteket, ezért a H_2 csoport minden tagja megemlíti felsorolásában az A_2 által említetteket. Így tovább haladva egyre kevesebb versenyzőből álló H_1, H_2, … csoportokhoz jutunk, amíg el nem érünk olyan A_n versenyzőhöz, akinek felsorolásában minden versenytársa szerepel. Minthogy a csökkenő csoportok sorozata nem lehet végtelen, el kell hogy jussunk ilyen versenyzőhöz.

Megjegyzés: A közölt megoldás burkoltan teljes indukcióra épül. Okoskodását a következőképpen is előadhatjuk: Ha csak két résztvevő van, a feladat állítása helyes; tegyük fel, hogy az állítás helyes, ha a résztvevők száma n-nél kevesebb; az n versenyző közül kiválasztott A_1 versenyző egy H_1 csoportot határoz meg, hacsak maga meg nem felel a követelménynek; H_1-ben n-nél kevesebb résztvevő van, az indukciós feltevés szerint van tehát közöttük olyan, akinek felsorolásában H_1-nek minden más tagja szerepel, a fentebbiek szerint viszont a H_1-be nem tartozók mindegyikét is említi, ez a versenyző tehát megfelel a feladat követelményének.

III. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha csak két résztvevő van, az állítás nyilván helyes. Tegyük fel, hogy helyes az állítás, ha n résztvevő van. Ha tehát $n+1$ résztvevő van, akkor van az első n között olyan A résztvevő, akinek felsorolásában minden más versenyző szerepel az első n közül. Legyen B az $(n+1)$-edik résztvevő. Ha B is szerepel A felsorolásában, akkor A megfelel a követelménynek. Ha B nem szerepel A felsorolásában, akkor B le kellett hogy győzze A-t és azokat, akiket A legyőzött; ezért B-nek felsorolásában szerepel A és mindazok, akiket A felsorolt; ekkor tehát B megfelel a követelménynek.

IV. megoldás. A versenyzők egy teremben helyezkednek el. Az egyik versenyző kivezeti a teremből azokat, akiket legyőzött (esetleg senkit sem). Ha van még, aki a teremben marad, egyikük újból kivezeti azokat, akiket legyőzött a teremben maradottak közül. Ezt folytatják mindaddig, amíg valaki a termet ki nem üríti. A kiürítő legyőzte azokat, akiket kivezet, és azokat, akik korábban kivezettek, hiszen a teremben maradhatott, ez utóbbiak viszont legyőzték az általuk kivezetetteket. A kiürítő tehát minden társát megemlíti felsorolásában.

Megjegyzések: 1. Az első megoldás mutatja, hogy a győztes (vagy a győztesek bármelyike) megfelel a követelménynek. Nem igaz azonban, hogy csak győztes felelhet meg. Sőt még a vesztes is megfelelhet, ezt az alábbi eredménytáblázat példája bizonyítja:

	A	B	C	D	E
A	–	1	1	1	0
B	0	–	1	0	1
C	0	0	–	1	1
D	0	1	0	–	1
E	1	0	0	0	–

2. Az is lehetséges, hogy a verseny minden résztvevője megfelel a feladat követelményének. A fenti eredménytáblázat erre is példát nyújt. Mutatja, hogy 5 versenyző esetében ez is lehetséges. Felvetjük a kérdést, hogy hány résztvevős versenyben lehetséges ez.

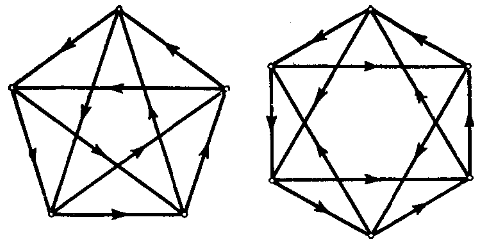
Ha két résztvevő van, nyilvánvaló, hogy csak egyikük (a győztes) felel meg a követelménynek. Négy résztvevős versenyben sem felelhetnek meg mind a négyen a feladat követelményének. Ha ugyanis van közöttük olyan résztvevő, aki három győzelmet aratott, akkor a többinek felsorolásában ez a versenyző nem szerepel. Ha van olyan résztvevő, akit mindenki legyőzött, akkor ennek felsorolásában senki sem szerepel. Ha viszont mindannyian egy vagy két győzelmet arattak, akkor ketten egyszer-egyszer, ketten pedig kétszer-kétszer győztek, hiszen összesen hat mérkőzés volt; a két egygyőzelmes versenyző egyike legyőzte a másikat, az elsőnek felsorolásában tehát csak két versenytársa (a másik és akit az legyőzött) szerepel.

Bizonyítjuk, hogy *ha a résztvevők száma nem* 2 *vagy* 4, *akkor lehetséges olyan versenyeredmény, hogy minden versenyző megfelel a feladat követelményének.*

Ezt először arra az esetre bizonyítjuk, amikor a versenyzők száma, n páratlan. Állítsuk a versenyzőket egy szabályos n-szög csúcsaiba, arccal a sokszög középpontja felé. Ha mindenki azokat győzte le, akik jobboldalt állnak, akkor mindenki mindenkit felsorol. Ezt könnyű ellenőrizni.

Ha a versenyzők száma páros és 4-nél több, legyen közöttük n férfi és n nő. Ismét egy szabályos $2n$-szög csúcsaiba állítjuk őket, váltakozva férfiakat és nőket. Győzze le mindenki a jobbján állókat azzal a kivétellel, hogy a nők jobboldali másodszomszédjuktól vereséget szenvednek. Ilyen versenyeredménynél mindenki felsorolja minden versenytársát függetlenül attól, hogy a sokszög átellenes csúcsaiban állók milyen eredménnyel mérkőznek. Ennek ellenőrzése sem nehéz.

A 7. ábra bemutatja az előírásunk szerinti versenyeredményeket 5 és 6 résztvevő esetében.



7. ábra

Az ábrán a nyíl a győztestől a vesztes felé irányul. A 6 versenyzős esetben az átellenesen állók mérkőzéseinek (elő sem írt) eredményét ábránk nem is jelzi.