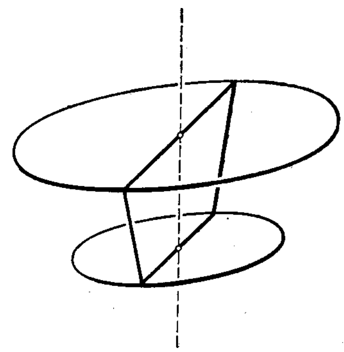
*Megjegyzések:* 1. Legrövidebben a következő módon indokolhatjuk az állítás helyességét: Tekintsük a testnek egy leghosszabb húrját. E húron átfektetett sík körben metsz, s a húr ennek a körnek átmérője, hiszen különben ennek a körnek, tehát magának a testnek is volna a kiszemeltnél hosszabb húrja. Ebből azonban az következik, hogy a test azonos avval a gömbbel, melynek egyik átmérője a kiszemelt húr. – Ez az okoskodás hiányos, mert nem bizonyítja, hogy *van* leghosszabb húr. Okoskodásunk bizonyítássá válnék, ha ezt is bizonyítanók, ehhez azonban a felsőbb matematika eszközeinek használatára volna szükség.

2. A feladat szövegezése félreértésre nem ad lehetőséget. Felvethető mégis a kérdés, mit jelent a »test« szó a szövegben. Felelhetjük, hogy térbeli pontoknak tetszőleges összességét, halmazát jelentheti. Feladatunknak ilyen irányban is szabatos megszövegezése így hangzik: Legyen egy térbeli ponthalmaznak egynél több pontja; rendelkezzék e ponthalmaz avval a tulajdonsággal, hogy ha egy síkban egynél több pontja van, akkor e síkban levő pontjai egy körlemezt (egy kör belső és határpontjai által alkotott halmazt) alkotnak; bizonyítandó, hogy e térbeli ponthalmaz gömb (egy gömb belső és határpontjainak halmaza). A következő megoldások akkor is hiánytalanok, ha azokat e szabatosabb feladatszövegezés szemüvegén át tekintjük.

**I. megoldás.** Tekintsük testünknek két párhuzamos síkmetszetét. Ezeknek középpontjain át síkjaikra merőleges síkot fektetünk. E sík a két kört négy pontban metszi (4. ábra).

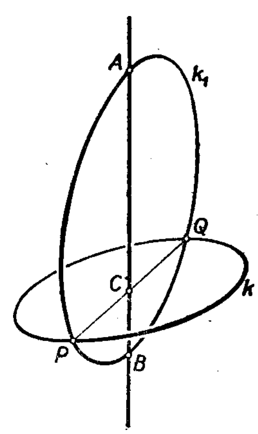


*4. ábra*

E négy pont által meghatározott trapéz húrnégyszög, hiszen síkja a testet körben metszi; ezért e trapéz szimmetrikus (szemközti szögei kiegészítő szögek, ezért egy párhuzamos oldalon egyenlő szögek nyugszanak). Szimmetrikus trapéznál a párhuzamos oldalak felezőpontjait összekötő egyenes merőleges a párhuzamos oldalakra, így tehát a körközéppontokat összekötő egyenes merőleges a körök síkjaira.

Ezek szerint, ha a két sík egyikét párhuzamosan eltoljuk, az adódó körmetszet középpontja mindig rajt van a másik kör középpontjában síkjára emelt merőlegesen. Ez az egyenes tehát forgástengelye testünknek, testünk forgástest. A forgástengelyen átfektetett sík is körben metszi azonban a testet, és a szimmetria miatt e kör középpontja a forgástengelyen van. A szereplő forgástest tehát gömb.

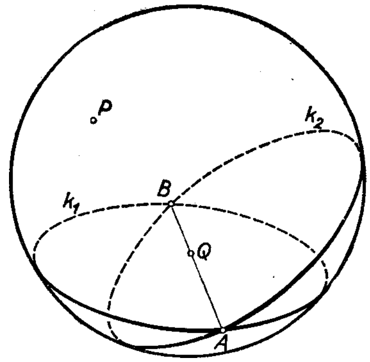
**II. megoldás.** Tekintsük a testnek egy $C$ középpontú $k$ körmetszetét (5. ábra).




*5. ábra*

Ennek síkjára $C$ pontban merőlegest állítunk. Fektessünk át egy síkot e merőlegesen. Ez a sík a $k$ kört $P$ és $Q$ pontban, a testet pedig egy $k_1$ körben metszi. Mivel $PQ$ húrja ennek a körnek, e húr felezőmerőlegese, tehát az eredetileg szerkesztett merőleges $k_1$-nek egy $AB$ átmérőjét tartalmazza. Mivel a metsző síkot önkényesen vettük fel, kimondhatjuk, hogy az $AB$ egyenesen átfektetett minden sík $AB$ átmérőjű körben metszi a testet. Testünk ezért az $AB$ átmérőjű gömbbel azonos.

**III. megoldás.** Ha testünknek egy $AB$ húrján át két síkot fektetünk (6. ábra), két körmetszethez, az egymást $A$, $B$ pontokban metsző $k_1$ és $k_2$ körökhöz jutunk.



*6. ábra*

E két kör egy $\boldsymbol{G}$ gömböt határoz meg (középpontja a két körközéppontban a körsíkokra emelt merőlegesek metszéspontja, s ezeknek van metszéspontjuk, mert $AB$ felezőmerőleges síkjában vannak, és nem párhuzamosak).

Legyen $P$ testünk felületén egy pont. Fektessünk egy síkot a $P$ ponton és az $AB$ húrnak egy belső $Q$ pontján át. Ez a sík a $k_1$ és $k_2$ kört négy pontban metszi, hiszen áthalad mindkét körnek belső pontján, a $Q$ ponton. Ez a négy pont a $\boldsymbol{G}$ gömb felületén egy kört határoz meg. A felvett sík körmetszete is áthalad e négy ponton, ez a két kör tehát azonos. Ezek szerint $P$ is $\boldsymbol{G}$ felületén van, és minden, a $Q$ ponton áthaladó sík által $\boldsymbol{G}$-ből kimetszett kör testünknek felületén helyezkedik el. Testünk ezért a $\boldsymbol{G}$ gömbbel azonos.

**IV. megoldás.** Legyen $k_1$ a testnek egy körmetszete (6. ábra), legyen $Q$ ennek a körlemeznek belső pontja, legyen $P$ a test felületén, de nem a $k_1$ körön, legyen végül $\boldsymbol{G}$ az a gömb, amelyik áthalad a $P$ ponton és tartalmazza a $k_1$ kört. A $PQ$ egyenesen átfektetett sík a $k_1$ kört $A$ és $B$ pontban metszi (hiszen tartalmazza a körnek belső $Q$ pontját), továbbá testünket és a $\boldsymbol{G}$ gömböt is körben metszi. E két kör azonos, mert $P$, $A$ és $B$ közös pontjaik. E síkmetszetek azonosságából a test és a $\boldsymbol{G}$ gömb azonossága következik.