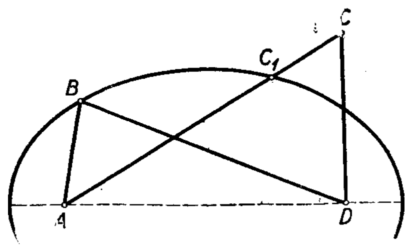
Megjegyzések: 1. Mivel a feladat négyszögről szól, az A, B, C, D pontoknak egymástól különbözőknek kell lenniök. Ezért téved, aki szerint a feladatnak azt kellene állítania, hogy az AB oldal nem nagyobb az AC átlónál, hiszen $AB = AC$, ha B és C egybeesik (?).

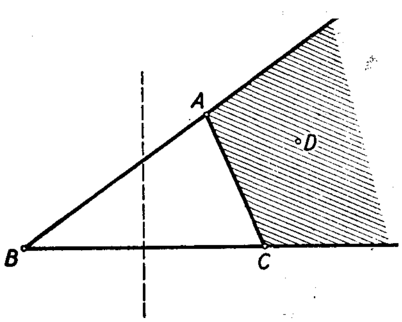
2. A következő okoskodás alátámasztja azt, hogy a feladat állítása helyes. Rajzoljunk ellipszist, amelynek fókuszai A és D, és amelyik áthalad a B ponton (1. ábra).



1. ábra

A feladat feltevéséből következik, hogy C ezen az ellipszisen kívül van, vagy esetleg rajta. Ezért az AC szakasznak egy C_1 pontja az ellipszisen van, C_1 esetleg azonos a C ponttal. Minthogy »az ellipszisnek A-ból induló rádiuszvektora állandóan növekszik, amint végpontja az ellipszisen a nagytengely A-hoz közelebb eső végpontjától a D-hez közelebb eső végpont felé mozog«, következik az, hogy AB kisebb AC_1-nél, s így még inkább kisebb AC-nél. – Ezt az okoskodást bizonyításnak nem nevezhetjük, hiszen az idézőjelek közé foglalt állítást a szemlélet alapján elhisszük ugyan, de bizonyítva nem látjuk. – Bizonyítássá válik ez az okoskodás, ha ezt az állítást nemcsak kimondjuk, hanem bizonyítjuk is. Ennek kifogástalan elvégzése azonban elég körülményes feladat (hacsak nem éppen feladatunknak más megoldása alapján következtetünk ennek az állításnak helyességére). – Az említett bizonyítás kevés munkával elvégezhető, ha a trigonometriát használjuk, és arra az előismeretre építünk, hogy pl. a cosinus-függvény 0° és 180° között állandóan fogy. Az ilyen bizonyítás eleminek és ötletesnek semmiképpen sem volna nevezhető.

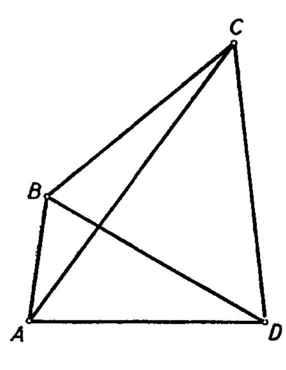
I. megoldás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben $AB \geq AC$, hogy tehát az A pont a BC szakasz felezőmerőlegesén, vagy pedig ennek C felőli oldalán helyezkedik el (2. ábra).



2. ábra

Mivel az $ABCD$ négyszög konvex, következik, hogy a D pont az AB oldalegyenesnek C felőli oldalán, a BC oldalegyenesnek A felőli oldalán, végül az AC átlóegyenesnek B-vel átellenes oldalán van. A D pont tehát annak (az ábrán vonalkázott) tartománynak belsejében van, amelyet megkapunk, ha az $ABC\sphericalangle$ tartományából az ABC háromszöget levágjuk. Ennek a tartománynak a belseje azonban egészben a BC szakasz felezőmerőlegesének C felőli oldalán van, hiszen határvonalainak pontjai közül legfeljebb csak A lehet a felezőmerőlegesen. Ezért a D pont is ebben a félsíkban van, és $BD > CD$. Ezt az egyenlőtlenséget az igaznak elfogadott egyenlőtlenséggel összegezve $AB + BD > AC + CD$ adódik, ami ellentmond a feladat kirovásának. Ez az ellentmondás feltevésünk lehetetlenségét és a feladat állításának helyességét bizonyítja.

II. megoldás. Ha $BD > CD$, akkor ebből és $AB + BD \leq AC + CD$ fennállásából (kivonással) következik, hogy $AB < AC$. Ezért a bizonyításnál jogosan szorítkozhatunk arra az esetre, amidőn $BD \leq CD$ (3. ábra).



3. ábra

Ebben az esetben – hivatkozva arra a tételre, hogy a háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van – a $BCD\triangle$-ből adódik, hogy $BCD\sphericalangle \leq DBC\sphericalangle$. Így tehát $BCA\sphericalangle < ABC\sphericalangle$, hiszen az előző egyenlőtlenség baloldalán szereplő szöget csökkentettük, a jobboldalon állót meg növeltük. Az utóbbi egyenlőtlenségből azonban – a már idézett tételt az $ABC\triangle$-re alkalmazva – adódik, hogy $AB < AC$.

III. megoldás. Ismeretes (és a háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségből nyomban következik), hogy egy konvex négyszög két átellenes oldalának összege az átlók összegénél kisebb, esetünkben tehát $AB+CD < AC+BD$. A feladat feltevése szerint $AB+BD \leq AC+CD$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve, rendezés után $2\cdot AB < 2\cdot AC$ adódik, ami állításunkat bizonyítja.