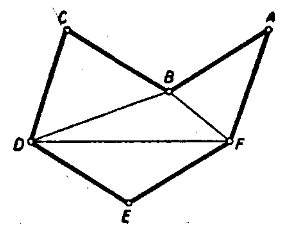
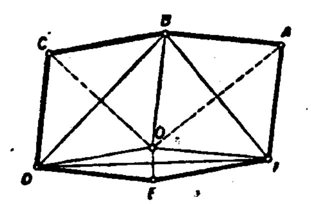
I. megoldás. Először azt bizonyítjuk, hogy a $BDF\triangle$ hegyesszögű. Legyen az egyenlőoldalú $ABCDEF$ hatszög belsejében elhelyezkedő $BDF\triangle$ derékszögű vagy tompaszögű. Legyen DF e háromszög leghosszabb oldala (1. ábra).



1. ábra

A $DEF\triangle$-ből látható, hogy a hatszögoldal DF felénél nagyobb, s így még inkább nagyobb, mint a BF, BD befogójú derékszögű háromszög átfogójának fele. A hatszögoldallal, mint sugárral írt körben a BF, BD húrokhoz tartozó középponti szögek a hatszög $A\sphericalangle$-ével és $C\sphericalangle$-ével egyenlők. A mondott átfogó, mint átmérő fölé írt körben viszont az ugyanakkora húrokhoz tartozó középponti szögeknek összege 180°. Ezek szerint $A\sphericalangle + C\sphericalangle < 180^\circ$, hiszen nagyobb sugarú körben ugyanakkora húrhoz kisebb középponti szög tartozik. Így tehát $A\sphericalangle + C\sphericalangle + E\sphericalangle < 360^\circ$, s a hatszög másik három szögének összege 360°-nál nagyobb, minthogy a hatszög szögösszege 720°. Feladatunknak szögekre vonatkozó kirovása tehát nem teljesülhet, ha a $BDF\triangle$ nem hegyesszögü.

Jelölje r a hegyesszögü $BDF\triangle$ köré írt kör sugarát, és O a középpontját. Ez a háromszög belsejében van. A hatszöget közös O csúccsal bíró hat háromszögre bontjuk fel (2. ábra).



2. ábra

Nem lehetséges az, hogy a hatszögoldal r-nél nagyobb legyen, mert ellenkező esetben a mondott hat háromszög mindegyikében kisebb volna az A, C, ill. E csúcsnál lévő szög, mint az O-nál elhelyezkedő, hiszen a szemközti oldalakra ilyen egyenlőtlenség állna fenn, így pedig az $A\sphericalangle + C\sphericalangle + E\sphericalangle$ összeg az O körül elhelyezkedő szögek összegénél, 360°-nál kisebb volna, ami – mint láttuk – lehetetlen. A hatszögoldal nem lehet r-nél kisebb sem. Ez ugyanúgy látható be, csak okoskodás közben ellentétes egyenlőtlenségek szerepelnek.

A hatszögoldal ezek szerint r-rel egyenlő. Ezért $ABOF$ és $EDOF$ rombusz-és $AB \parallel FO \parallel ED$. Ugyanúgy adódik, hogy a hatszög szemközti oldalai valamennyien párhuzamosak, s ezért a szemközti szögek egyenlők.

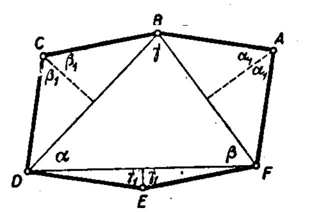
Megjegyzés: Az 1. ábrán szereplő hatszög nem konvex. Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy az egyenlő oldalú $ABCDEF$ hatszög nem is lehet konvex, ha a $BDF\triangle$ nem hegyesszögű. Megoldásunk első része tehát úgy is zárulhatott volna, hogy ha a $BDF\triangle$ nem hegyesszögű, akkor nem teljesülhet a feladatnak a hatszög konvexitását követelő kirovása sem.

II. megoldás. Először a következő segédtételt bizonyítjuk: Ha $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, és $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180^\circ$, továbbá

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1,$$

akkor $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$. Készítsünk ugyanis két háromszöget, az egyiket α, β, γ, a másikat α_1, β_1, γ_1 szögekkel. A sinus-tétel értelmében a sinusok arányainak egyezése azt mondja ki, hogy háromszögeink oldalainak aránya megegyezik. E háromszögek tehát hasonlók és megfelelő szögeik valóban egyenlők.

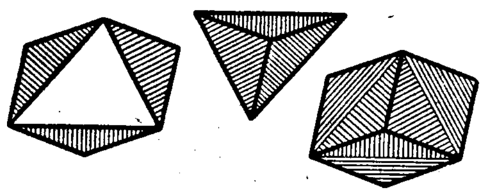
Legyenek most már a hatszög A, C, E csúcsainál levő szögek rendre $2\alpha_1$, $2\beta_1$, $2\gamma_1$ (3. ábra).



3. ábra

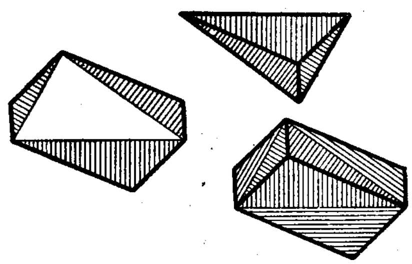
A hatszög szögösszege 720°, a feladat kirovása értelmében tehát $2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1=360°$, és így $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$. Ha a hatszög oldala a, a $BDF\triangle$ oldalai $2a\sin\alpha_1$, $2a\sin\beta_1$, $2a\sin\gamma_1$. Innen és a sinus-tételből következik, hogy a segédtételünkben szereplő aránYhármasok mindegyike a $BDF\triangle$ oldalainak arányát adja. Ezért ezek az aránYhármasok egyenlők, és segédtételünk értelmében $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$. A hatszög szemközti szögei egyenlők, mert pl. a D-nél lévő szöge α-nak és a β_1, γ_1 szögek pótszögei összegének, azaz α_1-nek összege, tehát az A-nál lévő szöggel egyenlő.

III. megoldás. Hatszögünkből három átlóval három egyenlő szárú háromszöget vágunk le (4. ábra).



4. ábra

Ezek csúcsainál levő szögeknek összege a feladat kikötése folytán 360°. Ezért e háromszögek egyetlen háromszöggé rakhatók össze. Az így kapott háromszög az oldalak egyezése miatt egybevágó azzal a háromszöggel, amelyik hatszögünkből a három egyenlő szárú háromszög levágása után megmaradt. A három egyenlő szárú háromszöget elhelyezhetjük tehát a hatszögünkből megmaradt háromszögön. Ezzel a hatszöget három (két-két egyenlő szárú háromszög alkotta) rombuszra bontottuk. Ebből közvetlenül adódik, hogy a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és szemközti szögei egyenlők.

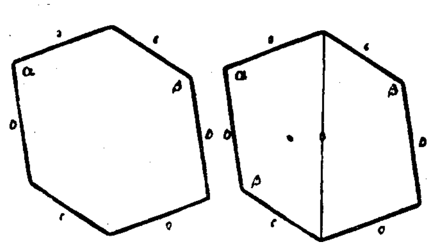


5. ábra

Megjegyzés: Ez a megoldás – mint az 5. ábra mutatja – alkalmazható a feladatban kimondott tétel következő általánosításának bizonyítására is: *Ha egy konvex hatszög szemközti oldalai páronként egyenlők, továbbá három páronként nem-szomszédos szögének összege a másik három szög összegével egyenlő, akkor szemközti szögei páronként egyenlők.* Következő megoldásainkban mindjárt ennek az általánosabb tételnek bizonyításával foglalkozunk. Ez munkatöbbletet nem okoz.

IV. megoldás. Egy hatszög megadásához nyilván elégséges oldalainak hosszát és három páronként nem-szomszédos szögét megadni. Ha a feladat szögekre vonatkozó kirovásának teljesülése folytán tudjuk, hogy három ilyen szög összege 360°, akkor természetesen elegendő közülük csak kettőt adni meg.

Legyen adva egy konvex hatszög, amelynek szemközti oldalai páronként egyenlők, s amelyik eleget tesz a feladat szögekre vonatkozó kirovásának. Készítsünk egy négyszöget, melynek három oldala a hatszög három csatlakozó oldalával egyenlő, s amelyben az e három oldal által közrefogott két szög a hatszögnek azzal a két nem-szomszédos szögével egyenlő, melyeket rendre ugyanakkora oldalak fognak közre (6. ábra).

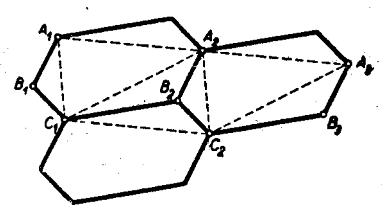


6. ábra

Tükrözzük ezt a négyszöget a negyedik oldal felezőpontjára. Így egy centrálszimmetrikus hatszöget kapunk, amelynek szemközti szögei a szimmetria folytán egyenlők, s amely ezért eleget tesz a feladat szögekre vonatkozó kirovásának.

Az adott hatszög az előrebocsátott megjegyzés értelmében egybevágó az így kapott hatszöggel. Ezért az adott hatszög szemközti szögei is egyenlők.

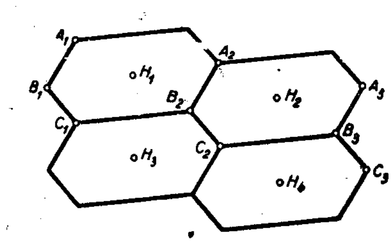
V. Megoldás. Az adott konvex hatszög szemközti oldalai egyenlők, és három páronként nem-szomszédos szögének összege 360°. Síkbeli mozgatással elhelyezhető tehát e hatszög három helyzetben úgy, hogy a mondott három szög egy teljes szöget alkosson.



7. ábra

A 7. ábra jelölését használva megállapíthatjuk, hogy $A_1A_2C_2C_1$ és $A_2A_3C_2C_1$ paralelogramma, mert szemközti oldalaik a hatszögek egybevágósága miatt egyenlők. Így tehát az A_1, A_2, A_3 pontok egy egyenesen vannak. Ugyancsak az egybevágóság miatt $B_1A_1A_2\sphericalangle = B_2A_2A_3\sphericalangle$. Ezért $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Tehát a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és szemközti szögei egyenlők.

VI. megoldás. A 7. ábra jelöléseit használjuk. Feltesszük, hogy A_1B_1, és A_2B_2 nem párhuzamos. Legyen tehát az $A_1B_1B_2A_2$ négyszög A_1 és A_2 csúcsú szögeinek összege 180°-nál kisebb (ellenkező esetben az A_1, A_2 és B_1, B_2 pontok szerepét felcserélnők). A 7. ábrát a C_2 szögletbe illesztett negyedik, ugyancsak az adott hatszög síkbeli mozgatásával kapott hatszöggel egészítjük ki (8. ábra).

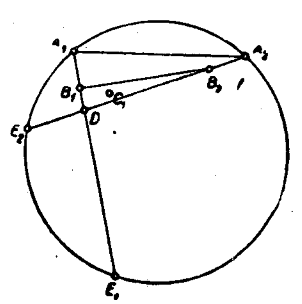


8. ábra

Ez lehetséges, mert az adott hatszög három-három páronként nem-szomszédos szögének összege 360°.

Forgassuk el a H_1 hatszöget az A_1, A_2, A_3 pontokon áthaladó k kör középpontja körül úgy, hogy az A_1 pont A_2 helyzetbe jusson. A hatszögek egybevágósága miatt $A_1A_2 = A_2A_3$. Ebből következik, hogy az elforgatás során az A_1A_2 szakasz A_2A_3 helyzetbe, a H_1 hatszög H_2 helyzetbe, a H_3 hatszög tehát H_4 helyzetbe jut. Ezért a C_1, C_2, C_3 pontok egy k-val koncentrikus k_1 körön vannak.

Állítjuk, hogy a C_1 pont s így a k_1 kör is *k belsejében van.* A H_1, H_2 hatszögek A_2-nél elhelyezkedő szögeinek összege 180°-nál kisebb. Ezért az A_2B_2 félegyenes k belsejébe indul és k-nak valamely A_2E_2 húrját tartalmazza (9. ábra).

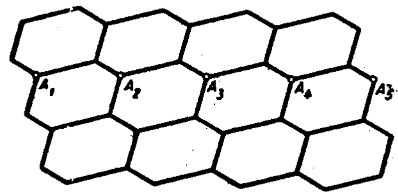


9. ábra

Ebből k középpontja körül való elforgatással az A_1B_1 félegyenes által tartalmazott A_1E_1 húrt kapjuk. E két húr egymást a körön belül egy D pontban metszi, hiszen B_1 és B_2 az A_1A_2 egyenesnek ugyanazon az oldalán van, így ez az E_1 és E_2 pontokra is áll, a húrok végpontjai tehát A_2, A_1, E_2, E_1 rendben következnek a k körön az elforgatás következményeként. Ezek szerint az $A_1A_2D\triangle$ a k körön belül van, s a konvexitás miatt e háromszög tartalmazza a C_1 pontot. Ezzel a fenti állítást igazoltuk.

A H_1, H_2 hatszögek alakzatának a H_3, H_4 hatszögek alakzatával való egybevágóságából azonban az következik, hogy a k és k_1 körök *sugara egyenlő*. Ez az ellentmondás feltevésünk lehetetlenségét bizonyítja. Hatszögünk szemközti oldalai tehát párhuzamosak és szemközti szögei egyenlők.

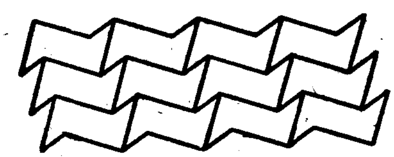
Megjegyzések: 1. A 8. ábrát újabb hatszögek csatolásával tovább építhetjük, így az egész síkot beborító hatszögrácshoz juthatunk (10. ábra).



10. ábra

A szemlélet azt mutatja, hogy ennek a rácsnak hatszögei egymást sem részben, sem egészben nem fedhetik. E tény szabatos igazolása nem illenék már e lap keretei közé. Megjegyezzük azonban, hogy ebből a tényből egyszerűen következik a feladat állítása. Elég ugyanis azt belátni, hogy az A_1, A_2, A_3, ... pontok egy egyenesen vannak. Ennek így kell lennie, mert ellenkező esetben egy körön helyezkednének el, hiszen az $A_1A_2A_3\dots$ töröttvonal szakaszai és ezek hajlásszögei a hatszögek egybevágósága miatt egyenlők. Ha viszont e pontok egy körön volnának, akkor volnának olyan hatszögek is, amelyek egymást részben vagy egészben fedik.

2. Elkészíthetjük a mondott hatszögrácsot akkor is, ha az adott hatszög konkáv (11. ábra).



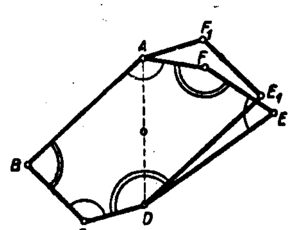
11. ábra

A szemléletre építve, de szabatos bizonyítás nélkül ugyanúgy következik ebből az ábrából, hogy feladatunk állítása és ennek csak a szemközti oldalak egyenlőségét megkövetelő általánosítása akkor is helyes, ha a hatszög konvexitását nem kötjük ki.

3. A közölt megoldások mindegyike kihasználja a hatszög konvexitását. Ez történt, amikor a hatszöget átlókkal daraboltuk, amikor szögeiket átlókkal felbontottuk, amikor a 6. ábra négyszögének szerkesztésénél természetesnek vettük, hogy oldalai nem metszik egymást, és amikor a 7. ábrával kapcsolatosan hallgatólag kihasználtuk azt, hogy pl. az $A_1A_2C_2C_1$ négyszög oldalai nem metszhetik egymást.

VII. megoldás. Az adott hatszöget AD átlójával két négyszögre bontjuk. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget az AD oldal felezőpontjára. Így a centrálszimmetrikus $ABCDE_1F_1$ hatszöghöz jutunk, melynek szemközti szögei egyenlők. Elég tehát kimutatnunk, hogy e hatszög az adott hatszöggel azonos.

Ellenkező esetben ugyanis pl. $DAF\sphericalangle < DAF_1\sphericalangle$ (12. ábra).



12. ábra

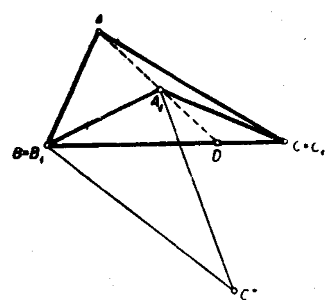
Mivel a $DAF\triangle$-ben és $DAF_1\triangle$-ben páronként egyenlő oldalak különböző szögeket fognak közre, a kisebbik szöggel szemben a harmadik oldalak kisebbike van, tehát $DF < DF_1$. Ugyanarra a tételre hivatkozva a $DEF\triangle$ és $DE_1F_1\triangle$ esetében: $DEF\sphericalangle < DE_1F_1\sphericalangle$. Ezek szerint az adott hatszög A, C, E csúcsú szögeinek összege kisebb a másik hatszög megfelelő szögeinek összegénél, $360°$-nál. Ezért a feladatnak a szögekre vonatkozó megkötése a vizsgált esetben az adott hatszögre nem teljesülhet.

Megjegyzések: 1. Valamennyi eddig közölt megoldás felhasználta a sokszögek szögösszegére vonatkozó ismereteinket, tehát lényegesen épített a párhuzamosság axiómájára. A legutóbbi megoldást úgy módosíthatjuk, hogy ebben a vonatkozásban csak a következő segédtételre építsen: *Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, akkor az ezekkel szemben levő szögeknek összege abban a háromszögben nagyobb, amelyikben a két oldal által közrefogott szög kisebb.* E segédtétel helyessége közvetlenül adódik, ha tudjuk, hogy a háromszög szögösszege 180°. Ha ezt a segédtételt felhasználjuk, befejezhetjük a legutóbbi megoldást anélkül, hogy a hatszög szögösszegére hivatkoznánk. Megállapíthatjuk ugyanis, hogy a $DAF\triangle$ és $DEF\triangle$ mindegyikében nagyobb a D és F csúcsú szögeknek összege, mint a $DAF_1\triangle$, ill. $DE_1F_1\triangle$ megfelelő szögösszege. Így tehát az adott hatszögben a 12. ábrán két ívvel jelzett szögeknek összege nagyobb, az egy ívvel jelzetteké pedig kisebb, mint a szimmetrikus hatszög megfelelő szögösszege. Mivel azonban ez utóbbiban a két szögösszeg egyenlő, az adott hatszögben a feladat kirovása nem teljesülhet.

2. Az ismertetett módosítás azért értékes, mert a felhasznált segédtételt a párhuzamosság axiómájára való hivatkozás nélkül is igazolhatjuk. Legyen az $ABC\triangle$-ben és $A_1B_1C_1\triangle$-ben $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, továbbá $ABC\sphericalangle > A_1B_1C_1\sphericalangle$. Igazolnunk kell, hogy

$$CAB\sphericalangle + ACB\sphericalangle < C_1A_1B_1\sphericalangle + A_1C_1B_1\sphericalangle.$$

Nyilván elég azzal az esettel foglalkoznunk, amidőn a baloldali szögeknek egyike nagyobb a jobboldal megfelelő szögénél, pl. amidőn $ACB\sphericalangle > A_1C_1B_1\sphericalangle$. Helyezzük egymásra háromszögeink BC és B_1C_1 oldalát (13. ábra).



13. ábra

Egyenlőtlenségeink következtében A_1 az $ABC\triangle$ belsejében van, ezért $C_1A_1B_1\sphericalangle > CAB\sphericalangle$, továbbá az AA_1 egyenes által kimetszett D pont a BC szakasz belsejében van. Forgassuk el az $ABC\triangle$-et B körül $A_1BC^*\triangle$ helyzetbe. Az adódó ábrában

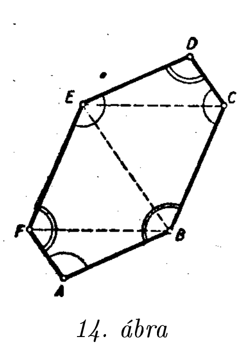
$$C_1A_1B_1\sphericalangle - CAB\sphericalangle = CA_1C^*\sphericalangle,$$
$$ACB\sphericalangle - A_1C_1B_1\sphericalangle = ACA_1\sphericalangle.$$

Állításunk tehát $ACA_1\sphericalangle < CA_1C^*\sphericalangle$ alakban írható. Ennek helyessége a két-két egyenlő oldalt tartalmazó $ACA_1\triangle$-ből és $CA_1C^*\triangle$-ből következik, ha tudjuk, hogy $AA_1 < CC^*$. Ez viszont nyomban adódik, ha az $ABA_1\triangle$-re és $CBC^*\triangle$-re alkalmazzuk a következő tételt: *Ha két egyenlőszárú háromszög szárai ugyanakkora szöget alkotnak, akkor annak a háromszögnek az alapja nagyobb, amelyiknek szára nagyobb.* A szárakra ugyanis $BA = BA_1 < BD < BC$.

3. Megállapításainkból következik, hogy a feladat állítása és annak csak a szemközti oldalak egyenlőségét megkövetelő általánosítása helyes az olyan geometriában is, amelyikben a párhuzamossági axióma nem érvényes, viszont a legutóbb kimondott tétel helyes. A tájékozott olvasó számára megjegyezzük, hogy ezzel igazoltuk állításunk helyességét a Bolyai-féle geometriában, sőt – ha a negyedfőkörnél nagyobb távolságokat kizárjuk – a gömbi geometriában is.

VIII. megoldás. A feladat eddig tárgyalt általánosításán is túlmenően a következőt igazoljuk: *Ha egy konvex hatszög szemközti oldalai egyenlők, és valamelyik szöge a szemközti szögnél kisebb, akkor a három-három páronként nem-szomszédos szög összege közül az a kisebb, amelyikben a szemközti szögnél kisebb szög összeadandóként szerepel.*

Legyen a feltételeinket kielégitő $ABCDEF$ hatszögben $A\sphericalangle < D\sphericalangle$ (14. ábra).



14. ábra

Minthogy az $FAB\triangle$-ben és a $CDE\triangle$-ben e szögeket páronként egyenlő oldalak fogják közre, $FB < EC$, és a másik két szög összege az $FAB\triangle$-ben nagyobb. A $BEF\triangle$ és $EBC\triangle$ két-két oldala egyenlő, viszont a harmadik oldal a $BEF\triangle$-ben kisebb, ezért tehát $BEF\sphericalangle < EBC\sphericalangle$, és a másik két szög összege a $BEF\triangle$-ben nagyobb. A kimondott szögegyenlőtlenségeket egybefogva éppen azt kapjuk, hogy ábránk egyíves szögeinek összege a kétívesekénél kisebb.

Megjegyzések: 1. Mivel csak az előző megoldáshoz fűzött megjegyzésben kimondott segédtételt használtuk, és a párhuzamossági axiómát nem, azért az ott mondottak a most bizonyított erősebb általánosításra is érvényesek.

2. Könnyű belátni, hogy ha egy konvex hatszög szemközti oldalai egyenlők, és egyik szöge is egyenlő a szemközti szöggel, akkor ez valamennyi szögre áll. Ha ugyanis pl. $A\sphericalangle = D\sphericalangle$, akkor ebből az $FAB\triangle$ és $CDE\triangle$ egybevágósága, majd $FB = EC$ révén a $BEF\triangle$ és $EBC\triangle$ egybevágósága, tehát hatszögünk centrálszimmetrikus volta következik. Ezt a megjegyzést felhasználva a feladat állításának a következő, valamivel még többet mondó általánosítását mondhatjuk ki: *Ha egy konvex hatszög szemközti oldalai páronként egyenlők, és három páronként nem-szomszédos szöge közül az egyik a hatszög szemközti szögénél kisebb, akkor ez a három szög két másikára is áll.* Ha ugyanis e három szög egyike kisebb a szemközti szögnél, másika pedig a szemközti szögnél nagyobb vagy azzal egyenlő volna, akkor e három szög összege – a megoldásunkban bizonyított tétel és a fenti megjegyzés értelmében – a másik három szög összegénél egyrészt kisebb, másrészt viszont annál nagyobb vagy azzal egyenlő volna.

IX. megoldás. Hivatkozni fogunk arra, hogy ha két konvex négyszög megfelelő oldalai páronként egyenlők, egyiknek két szemközti szögei α és β, a másiknak megfelelő szögei α_1 és β_1, ha továbbá $\alpha < \alpha_1$, akkor $\beta < \beta_1$. Ez nyomban következik, ha a másik két szögpontot összekötő átlóval négyszögeinket két-két háromszögre vágjuk fel. Ugyanis $\alpha < \alpha_1$ miatt a meghúzott átló az első négyszögben rövidebb, mint a másikban. Ebből viszont $\beta < \beta_1$ következik.

Állítjuk, hogy ha hatszögünknek három páronként nem-szomszédos szöge közül kettő kisebb a szemközti szögnél, akkor ez a harmadik szögre is áll. Valóban, ha a 14. ábrában $A\sphericalangle < D\sphericalangle$ és $C\sphericalangle < F\sphericalangle$, akkor az előrebocsátott megjegyzést az $ABEF$ és $BCDE$ négyszögekre alkalmazva azt kapjuk, hogy e négyszögeknek E-nél elhelyezkedő szögei rendre kisebbek, mint a másik négyszögnek B-nél lévő szögei. Ezért csakugyan $E\sphericalangle < B\sphericalangle$.

Tudjuk, hogy ha hatszögünknek egy szöge a szemköztivel egyenlő, ugyanez minden szögre is igaz. Ezt az előző megoldáshoz fűzött megjegyzésben bizonyítottuk.

Ezek szerint, *ha a konvex hatszög szemközti oldalai egyenlők, akkor három-három nem-szomszédos szöge vagy páronként egyenlő, vagy pedig az egyik szöghármasnak mindegyik szöge kisebb a másik szöghármasnak megjelelő (szemközti) szögénél.* Ha ugyanis nem mindegyik szög egyenlő a szemközti szöggel, akkor – mint tudjuk – egyik szög sem lehet a szemköztivel egyenlő. Ebben az esetben a három átellenes szögpárnak kisebb szögei ugyanahhoz a szöghármashoz kell, hogy tartozzanak, mert ellenkező esetben az egyik szöghármas kettőt tartalmazna e kisebb szögek közül, ami a bizonyított állítás szerint lehetetlen.

A bizonyított tétel többet mond ki, mint feladatunk állítása.

Megjegyzés: 1. Feladatunk állításának most bizonyított általánosítása csak átszövegezése a legutóbbi megjegyzésben kimondottnak.

2. Ebben az utolsó megoldásban sem a párhuzamosság axiómájára, sem a legutóbbi két megoldásban felhasznált segédtételre nem támaszkodtunk. Megoldásunk bizonyítja, hogy feladatunknak tétele és tárgyalt általánosításainak mindegyike helyes a nem-euklideszi geometriában, a Bolyai-féle geometriában és a gömbi geometriában is.