I. megoldás. Legyen $2n^2 = kd$, ahol a feltevés értelmében k pozitív egész szám. Ha $n^2 + d$ négyzetszám, akkor valamely x egész számra

$$x^2 = n^2 + d = n^2 + \frac{2n^2}{k},$$

s ebből következőleg

$$k^2x^2 = n^2(k^2 + 2k).$$

Ez azonban lehetetlen, mert a baloldal teljes négyzet, a jobboldal első tényezője is; viszont a második tényező nem teljes négyzet, hiszen

$$k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2,$$

azaz két szomszédos négyzetszám fogja közre.

Megjegyzések: 1. Amikor megállapítottuk, hogy k pozitív, arra építettünk, hogy a feladat csak természetes számokról szól. A feladat szövegezése kifogásolható, mert kifejezetten nem mondja, hogy az állítás csak pozitív d osztókra vonatkozik. Ilyen megszorítás nélkül nem is helyes a feladat állítása, mert $d = -n^2$ osztója $2n^2$-nek, s ekkor $n^2 + d = 0$, ami 0-nak négyzete. Minden más negatív osztóra teljesül a feladat állítása. Ez belátható, ha megtartjuk a megoldás jelöléseit, de most feltételezzük, hagy k negatív egész szám. Ha $k = -1$, akkor $k^2 + 2k = -1$ nem négyzetszám; ha $k = -2$, láttuk, hogy az állítás nem teljesül. Ha viszont $k < -2$, akkor

$$(k+2)^2 < (k+2)^2 + 2(-k-2) = k^2 + 2k < (k+1)^2,$$

s ezért $k^2 + 2k$ ismét nem lehet négyzetszám.

2. A megoldásban hivatkoztunk arra a tényre, hogy ha a, b, c természetes számok, és $a^2 = b^2c$, akkor c szükségképpen négyzetszám. Ez következik abból, hogy a természetes számok egyféleképen bonthatók fel törzsszámok szorzatára. Emiatt a^2 és b^2 felbontásában minden törzstényező páros kitevővel szerepel, mert a négyzetreemelés ilyen törzsfelbontáshoz vezet. Így tehát, az $a^2 : b^2$ osztás elvégzésével, c-nek olyan felbontását kapjuk, melyben minden törzstényező páros kitevővel szerepel. Ezért c négyzetszám.

II. megoldás. Legyen újból $2n^2 = kd$. Ha a feladat állítása hamis, akkor valamely x egész számra

$$\frac{k+2}{k} = \frac{n^2+d}{n^2} = \frac{x^2}{n^2}.$$

A baloldali tört számlálójának s nevezőjének különbsége 2, s e különbség a tört egyszerűsítése után csak csökkenhet. A jobboldali tört egyszerűsítésével $\frac{p^2}{q^2}$ alakú törthöz jutunk, ahol p és q természetes számok, s ezek nem lehetnek egyenlők mert $n^2 + d \neq n^2$. Ez utóbbi tört számlálójának és nevezőjének különbsége viszont legalább 3, mert felírható p és q összegének és különbségének szorzataként, két egymástól különböző természetes szám összege pedig legalább 3, különbségük meg legalább 1. A fenti egyenlőség tehát nem teljesülhet.

Megjegyzés: Amikor megállapítottuk, hogy p és q nemcsak egész számok, hanem pozitív egész számok, akkor kirekesztettük a tárgyalásból azt a lehetőséget, hogy az egyenlőségünkben szereplő törtek értéke 0. Bizonyításunk tehát $k = -2$ kivételével k minden egész értékére helytálló (összhangban korábbi megjegyzésünkkel).

III. megoldás. Ha a feladat állítása hamis, akkor van egy legkisebb olyan n természeten szám, amelyhez található az állítást cáfoló d szám. Kimutatjuk, hogy ennek az n-nek és d-nek nem lehet közös p törzstényezője: Ellenkező esetben ugyanis p osztója $(n^2 + d)$-nek; és mivel ez négyzetszám, p^2 is osztója $(n^2 + d)$-nek; akkor p^2 osztója d-nek is, mert n^2-nek osztója; tehát az n-nél kisebb $\frac{n}{p}$ számra és négyzete kétszeresének $\frac{d}{p^2}$ osztójára

$$\left(\frac{n}{p}\right)^2 + \frac{d}{p^2} = \frac{n^2+d}{p^2}$$

négyzetszám, ami ellentmond n megválasztásának.

Így tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor d és n relatív prím. Ez esetben d csak úgy lehet $2n^2$-nek osztója, ha 2-nek is osztója. Ezért d értéke csak 1 vagy 2 lehet. Viszont sem $n^2 + 1$, sem $n^2 + 2$ nem lehet négyzetszám, hiszen az n^2-re következő első négyzetszám $(2n+1)$-gyel nagyobb, ami 2-nél több. Lehetetlen tehát az, hagy feladatunk állítása hamis legyen.

Megjegyzések: 1. Ha ennél a megoldásnál is kiterjesztjük figyelmünket a negatív osztókra, akkor $n^2 - 1$ és $n^2 - 2$ is vizsgálandó. Könnyű megállapítani, hogy közülük csak $n^2 - 1$, s csak akkor lehet négyzetszám, ha értéke 0. Ez megfelel korábbi megjegyzéseinknek.

2. Felvetjük a kérdést, hogy vajon igaz marad-e a feladat állítása, ha abban $2n^2$ helyett n^2-nek más többszöröse szerepel. Utolsó megoldásunkból látjuk, hogy $2n^2$ azért felel meg, mert sem 2, sem annak osztója nem írható fel két természetes szám négyzetének különbségeként. Van-e más ilyen tulajdonságú N természetes szám? Minthogy

$2k+1=(k+1)^2-k^2$, azért N-nek nem lehet páratlan törzstényezője, N csak 2-nek hatványa lehet. Mivel pedig $8=3^2-1^2$, azért N nem lehet 2-nek sem köbe, sem magasabb hatványa. Tehát N csak 1, 2 vagy 4 lehet. Ezek a számok meg is felelnek: 1-ről és 2-ről már beláttuk; 4 is megfelel, ugyanis n^2+4 sem lehet négyzetszám, mert n^2 és $(n+2)^2$ közrefogja, viszont $(n+1)^2$ és n^2+4 sohasem egyenlő, hiszen különbségük páratlan. Ezzel tehát a feladat állításán túlmenően igazoltuk, hogy *ha n természetes szám, és d osztója $4n^2$-nek, akkor n^2+d nem négyzetszám.*