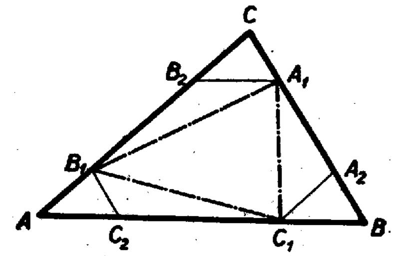
I. megoldás: Húzzunk párhuzamosakat az A_1, B_1, C_1 pontokon át rendre az AB, BC, CA oldalakkal (7. ábra). E párhuzamosak a CA, AB, BC oldalakat rendre B_2, C_2, A_2 pontokban metszik. Az így kapott AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C háromszögek oldalaik párhuzamossága miatt hasonlók az $ABC\Delta$-höz.



7. ábra

E háromszögek egymással egybevágók, ugyanis

$$A_1C = (1-\lambda)\cdot BC, \qquad B_1A = (1-\lambda)\cdot CA, \qquad C_1B = (1-\lambda)\cdot AB$$

miatt egy-egy oldaluk az eredeti háromszög megfelelő oldalának ugyanannyiszorosa. Az egybevágóságból következik, hogy

$$A_1B_2 = C_2A, \qquad B_1C_2 = A_2B, \qquad C_1A_2 = B_2C.$$

Ebből pedig az adódik, hogy az $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$ hatszög kerülete az AC_1, BA_1, CB_1 távolságok összegével, vagyis az eredeti háromszög oldalai λ-szorosainak összegével, tehát az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosával egyenlő.

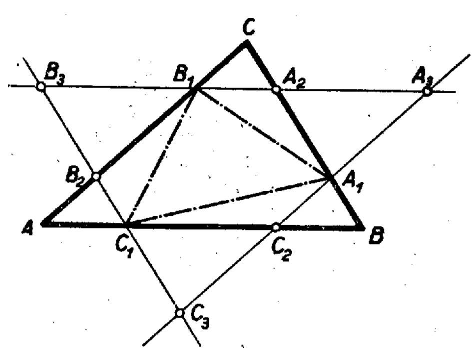
A feladat állítása most már abból következik, hogy az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete a szerepeltetett hatszög kerületénél kisebb. Hiszen e háromszög egy-egy oldala kisebb a hatszög két-két oldalának összegénél.

Megjegyzés: Megoldásunk kihasználta, hogy a szereplő hatszög csúcsai mind különböző pontok. Ez nem következik be, ha $\lambda = \frac{1}{2}$, amikor is $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$, $C_1 \equiv C_2$, s akkor sem, ha $\lambda = 1$, amikor viszont $A_1 \equiv B_2$, $B_1 \equiv C_2$, $C_1 \equiv A_2$. A feladat állítása sem helyes ebben a két esetben, hiszen az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete mindkét esetben éppen egyenlő az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosával.

Kihasználta okoskodásunk azt a tényt is, hogy a C_2, A_2, B_2 pontok rendre az AC_1, BA_1, CB_1 távolságok belsejében vannak. Hiszen különben nem volna pl. a hatszög A_1B_2 és C_2C_1 oldalának összege az AC_1 távolsággal egyenlő. A mondott tény bekövetkezése annak következménye, hogy $\lambda > \frac{1}{2}$, azaz $1-\lambda < \lambda$. Ugyanis pl.

$$AC_2 = (1-\lambda)\cdot AB < \lambda \cdot AB = AC_1.$$

Nem is igaz a feladat állítása, ha $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Ezt a következőképpen bizonyítjuk: Az A_1, B_1, C_1 pontokon át párhuzamosakat húzunk rendre a CA, AB, BC oldalakkal (8. ábra).



8. ábra

E párhuzamosak az AB, BC, CA oldalakat rendre C_2, A_2, B_2 pontokban metszik, s együttesen az $A_3B_3C_3\Delta$-et határolják. Az AC_1B_2, C_2BA_1, B_1A_2C háromszögek oldalaik párhuzamossága miatt hasonlók az eredeti háromszöghöz, s egymással egybevágók is, mert mindegyiküknek egy-egy oldala az $ABC\Delta$ megfelelő oldalának λ-szorosa. Így tehát

$$B_1A_2 = \lambda\cdot AB, \qquad C_1B_2 = \lambda\cdot BC, \qquad A_1C_2 = \lambda\cdot CA.$$

Tudjuk most azt is, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok rendre a BA_1, CB_1, AC_1 távolságokon kívül vannak, hogy tehát az $A_3B_3C_3\Delta$ csúcsai az eredeti háromszögön kívül helyezkednek el. Az előbbi mintára belátjuk, hogy az $A_3A_2A_1$,

$B_1B_3B_2$, $C_2C_1C_3$ háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz, s egymással egybevágók, mert A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 oldalaik az $ABC\Delta$ megfelelő oldalainak $(1-2\lambda)$-szorosai. Így tehát

$$A_2A_3 = B_3B_1, \qquad B_2B_3 = C_3C_1, \qquad C_2C_3 = A_3A_1.$$

Az $A_1B_1A_3$, $B_1C_1B_3$, $C_1A_1C_3$ háromszögek egy-egy oldalára felírva, hogy a másik két oldal különbségénél nagyobb:

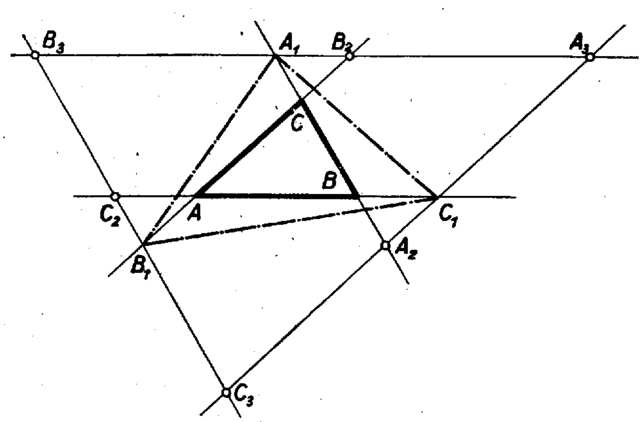
$$\begin{aligned} A_1B_1 &> B_1A_2 + A_2A_3 - A_3A_1, \\ B_1C_1 &> C_1B_2 + B_2B_3 - B_3B_1, \\ C_1A_1 &> A_1C_2 + C_2C_3 - C_3C_1. \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek összege a fenti egyenlőségek figyelembe vételével:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 > B_1A_2 + C_1B_2 + A_1C_2.$$

Ez pedig fentebbi megállapításunk értelmében éppen azt mondja ki, hogy az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosánál nagyobb.

Akkor sem teljesül a feladat állítása, ha $\lambda > 1$, mikor is az A_1, B_1, C_1 pontok az $ABC\Delta$ oldalainak meghosszabbítására kerülnek. Ezt a következőképpen látjuk be: Az A_1, B_1 C_1 pontokon át párhuzamosakat húzunk rendre az AB, BC, CA oldalakkal (9. ábra).



9. ábra

E párhuzamosak a CA, AB, BC oldalakat rendre B_2, C_2, A_2 pontokban metszik, s együttesen az $A_3B_3C_3\Delta$-et határolják. Az AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C háromszögek oldalaik párhuzamossága miatt hasonlók az eredeti háromszöghöz, s egymással egybevágók, mert egy-egy oldaluk az $ABC\Delta$ megfelelő oldalának $(\lambda-1)$-szerese. Ebből az egybevágóságból következik, hogy $A_2B = CA_1$, $B_2C = AB_1$, $C_2A = BC_1$, hogy tehát a CA_2, AB_2, BC_2 távolságok is λ-szorosai az $ABC\Delta$ oldalainak. Minthogy $AB_2A_3C_1$, $BC_2B_3A_1$ és $CA_2C_3B_1$ paralelogramma, megállapításainkból következik, hogy az $A_3B_3C_3\Delta$ oldalait az ezeken elhelyezkedő két-két pont olyan három–három távolságra darabolja, amelyek az $ABC\Delta$ egy-egy oldalának sorjában λ-szorosai, $(\lambda-1)$-szeresei és λ-szorosai. Így tehát az $A_1B_1C_1\Delta$ csúcsai úgy helyezkednek el az $A_3B_3C_3\Delta$ oldalain, hogy

$$B_3A_1 : B_3A_3 = C_3B_1 : C_3B_3 = A_3C_1 : A_3C_3,$$

hiszen ezeknek az arányoknak mindegyike a $\lambda : (3\lambda - 1)$ aránnyal egyenlő. Minthogy ennek az aránynak értéke $\lambda > 1$ folytán $\frac{1}{2}$-nél kisebb, azért előzőleg bizonyított állításunk e háromszögekre teljesül. Tudjuk tehát, hogy az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete nagyobb a B_3A_1, C_3B_1, A_3C_1 távolságok összegénél, azaz az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosánál.

Megjegyezhetjük még, hogy $\lambda \leq 0$ esetben a feladat állítása eleve nem teljesülhet, hiszen egy háromszög kerülete csak pozitív lehet.

Összefoglalva az e megjegyzésben mondottakat megállapítjuk, hogy a feladat $1/2 < \lambda < 1$ megkötése lényeges. Ha e megkötés nem teljesül, a feladat állítása soha sem helyes.

II. megoldás: Ha a γ_1 és γ_2 szög 0-nál nagyobb és 180°-nál kisebb, akkor

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2) < \sin\gamma_1 + \sin\gamma_2,$$

hiszen a baloldalt növeljük, ha azt $\sin\gamma_1\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1\sin\gamma_2$ alakban írva a pozitív sinus-tényezők cosinus-együtthatóinak helyébe azoknál nagyobb 1-et írunk.

Ha továbbá egy ugyancsak 0-nál nagyobb és 180°-nál kisebb δ szöget szerepeltetünk, akkor az előző egyenlőtlenséget a pozitív $\sin\delta$-val szorozva

$$\sin(\delta+\gamma_1)\sin\gamma_2+\sin(\delta-\gamma_2)\sin\gamma_1<\sin\delta\,(\sin\gamma_1+\sin\gamma_2)$$

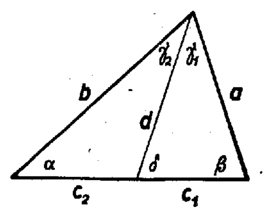
adódik. Ugyanis (a szereplő szögösszegek és szögkülönbségek függvényeit a tagok függvényeivel fejezve ki)

$$\sin\delta\sin(\gamma_1+\gamma_2)=\sin(\delta+\gamma_1)\sin\gamma_2+\sin(\delta-\gamma_2)\sin\gamma_1$$

azonosan teljesül. Így tehát utolsó egyenlőtlenségünket a pozitív $\sin\gamma_1\sin\gamma_2$ szorzattal osztva

$$\frac{\sin(\delta+\gamma_1)}{\sin\gamma_1}+\frac{\sin(\delta-\gamma_2)}{\sin\gamma_2}<\frac{\sin\delta}{\sin\gamma_1}+\frac{\sin\delta}{\sin\gamma_2}.$$

Tekintsünk egy a, b, c oldalú háromszöget, melyet egy d hosszúságú távolság egy a, d, c_1 és egy b, d, c_2 oldalú háromszögre vág (10. ábra).



10. ábra

Ezekre fennáll a

$$\frac{d}{c_1}+\frac{d}{c_2}<\frac{a}{c_1}+\frac{b}{c_2}$$

egyenlőtlenség. Ugyanis a sinus-tétel szerint ez az előbbi egyenlőtlenséggel azonos, ha ábránk szögjelöléseit használjuk, hiszen e szögekre

$$a=\delta-\gamma_2,\ \beta=\pi-(\delta+\gamma_1).$$

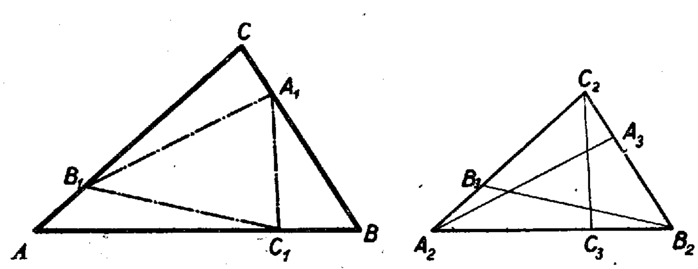
Ha utolsó egyenlőtlenségünket $\left(\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}\right)$-vel osztjuk és a $\mu=\dfrac{c_1}{c_1+c_2}$ jelölést használjuk, akkor a

$$d<\mu b+(1-\mu)a$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Tekintsünk egy $A_2B_2C_2\Delta$-et (11. ábra), melynek oldalain az A_3, B_3, C_3 pontok úgy helyezkednek el, hogy

$$A_3C_2:B_2C_2=B_3A_2:C_2A_2=C_3B_2:A_2B_2.$$



11. ábra

Állítjuk, hogy az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_3B_3C_3$ kerületénél kisebb. Ha ugyanis a fenti arányok közös értékét μ-vel jelöljük, akkor előző megállapításunk értelmében

$$A_2A_3<\mu A_2B_2+(1-\mu)C_2A_2,$$
$$B_2B_3<\mu B_2C_2+(1-\mu)A_2B_2,$$
$$C_2C_3<\mu C_2A_2+(1-\mu)B_2C_2.$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek összege éppen állításunkat adja.

Tekintsük végül magát a feladatban leírt alakzatot. Legyen az $A_2B_2C_2\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz, s oldalai legyenek az $ABC\Delta$ oldalainak λ-szorosai, tehát az A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 oldalak rendre az AC_1, BA_1, CB_1 távolságokkal egyenlők. Ezekre az oldalakra felmérjük a $C_2A_3=CA_1$, $A_2B_3=AB_1$, $B_2C_2=BC_1$ távolságokat, amit $1-\lambda<\lambda$ miatt megtehetünk. Ezzel biztosítottuk, hogy az $A_2C_2A_3$, $B_2A_2B_3$, $C_2B_2C_3$ háromszögek rendre egybevágók a B_1CA_1, C_1AB_1, A_1BC_1 háromszögekkel, s így az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_1B_1C_1\Delta$ kerületével egyenlő. Minthogy az A_3, B_3, C_3 pontok felvételénél az $A_2B_2C_2\Delta$ oldalaira ezeknek az oldalaknak ugyanannyiszorosát, t. i. $\mu = \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$-szorosát mértük fel, teljesülnek előzőleg bizonyított állításunknak feltételei. E szerint tehát az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_2B_2C_2\Delta$ kerületénél, vagyis az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosánál kisebb.

Megjegyzés: Nem nehéz e második megoldást úgy alakítani, hogy az $\dfrac{1}{2} < \lambda < 1$ kirovás szükségessége is kiolvasható legyen. Elegendő ugyanis a megoldásban szereplő első egyenlőtlenséghez hozzáfűzni, hogy amennyiben a γ_1 és γ_2 szögek -180° és 180° közé esnek, s összegük pozitív, úgy ez az első egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha a γ_1 és γ_2 szögek mindegyike pozitív. Ebből a megállapításból kiindulva megoldásunk gondolatmenetének változatlan megtartása (s előjeles távolságok és szögek használata) mellett a mondott eredményhez juthatunk, ezt azonban itt nem részletezzük.