I. megoldás: Az első $3n$ egész számot három csoportba osztjuk:

A) $1, 2, \ldots, n$;

B) $n+1,\ n+2, \ldots, 2n$;

C) $2n+1, 2n+2, \ldots, 3n$.

Minthogy $n+2$ számot választunk ki, ezeket mind nem választhatjuk egyetlen csoportból.

Ha a számokat csak az A és B, vagy pedig csak a B és C csoportokból választjuk, akkor a kiválasztott számok legkisebbikének és legnagyobbikának különbsége n-nél nagyobb, hiszen közöttük van a többi n kiválasztott szám, viszont $2n$-nél kisebb, hiszen a csoportok legszélső elemeinek különbsége is csak $2n-1$.

Ha a számokat az A és C csoportból választjuk, akkor az A csoportból kiválasztott legnagyobb s a C csoportból kiválasztott legkisebb számnak különbsége n-nél nagyobb, hiszen e két csoport legközelebbi elemeinek különbsége is $n+1$. Ugyanannak a két kiválasztott számnak a különbsége azonban $2n$-nél kisebb is, mert közöttük csak ki nem választott számok vannak, s valamennyi ki nem választottnak száma is csak $3n-(n+2)=2n-2$.

Foglalkozzunk végül avval az esettel, amikor mindhárom csoportból választjuk a számokat. Legyenek a, b, c rendre az A, B, C csoportba tartozó kiválasztott számok. Feltehetjük, hogy a $b-a$ és $c-b$ különbségeknek nem mindegyike n, hiszen ellenkező esetben az a, b, c számok valamelyike helyett egy ugyanabba a csoportba tartozó másik kiválasztott számot tekinthetnénk. Ez lehetséges, mert $n>1$ feltevés mellett $n+2>3$, tehát valamelyik csoportból több számnak kell szerepelnie a kiválasztottak között.

Nem kell foglalkoznunk avval az esettel sem, amidőn a $b-a$ és $c-b$ különbségeknek valamelyike n-nél nagyobb, hiszen e különbségek $2n$-nél kisebbek, minthogy az A és B, valamint a B és C csoportok legtávolabbi elemeinek különbsége is csak $2n-1$.

Így csak annak az esetnek vizsgálata marad hátra, amidőn a $b-a$ és $c-b$ különbségeknek egyike sem nagyobb n-nél, de legalább az egyike kisebb. Ebben az esetben azonban $c-a$, mint e különbségeknek összege, $2n$-nél kisebb, s másrészt eleve n-nél nagyobb, hiszen a B csoportnak mind az n eleme a és c között van.

Olyan utasítást adtunk tehát, amely minden esetben elvezet egy kívánt tulajdonságú számpárhoz.

II. megoldás: Két kiválasztott számot szomszédosnak mondunk, ha a közöttük lévő számoknak egyike sem szerepel a kiválasztottak között. Két szomszédos kiválasztott számnak különbsége nem lehet $2n$ vagy még több, mert szomszédos kiválasztott számok között ki nem választott számok vannak, és csak $3n-(n+2)=2n-2$ ki nem választott szám van. Ha a kiválasztott számok közül két szomszédosnak különbsége $2n$-nél kisebb, de n-nél nagyobb, akkor e két szám a feladat kívánalmát kielégíti. Így tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor a kiválasztott számok közül bármely két szomszédosnak különbsége legfeljebb n.

Legyen a a kiválasztott számok legkisebbike. Ha szerepel a kiválasztott számok között olyan, amelyik $(a+n)$-nél nagyobb s $(a+2n)$-nél kisebb, akkor a és ez a szám kielégíti a feladat kívánalmát. Ha viszont a mondott számoknak egyike sem szerepel a kiválasztottak között, akkor $a+n$ és $a+2n$ szükségképpen szerepel közöttük, mert különben a mondott számokat közrefogó két szomszédos kiválasztott számnak különbsége feltevésünkkel ellentétben n-nél nagyobb volna. Bizonyos, hogy van két ilyen közrefogó szomszédos szám, hiszen maga a a mondott számoknál kisebb, s nagyobbnak is kell lennie a kiválasztott számok között, minthogy a-tól kezdve $(a+n)$-ig bezárólag összesen csak $n+1$ szám van.

Ha viszont a, $a+n$ és $a+2n$ szerepel a kiválasztott számok között, akkor bármely negyedik szám e három valamelyikével együtt megfelel a feladat kívánalmának. Hiszen a-nál kisebb szám nincs a kiválasztottak között, az a-nál nagyobb és $(a+n)$-nél kisebb számoknak $(a+2n)$-nel alkotott különbségük, az $(a+n)$-nél nagyobb és $(a+2n)$-nél kisebb számoknak a-val alkotott különbségük, az $(a+2n)$-nél nagyobb és $3n$-nél nem nagyobb számoknak pedig $(a+n)$-nel alkotott különbségük n-nél nagyobb s egyben $2n$-nél kisebb. Minthogy pedig $n>1$ esetben $n+2>3$, található a felsorolt háromtól különböző negyedik kiválasztott szám. Így tehát minden esetben eljutottunk a feladat kívánalmát kielégítő számpárhoz.

III. megoldás: Ha a kiválasztott számok között $3n$ nem szerepel, akkor mindegyik kiválasztott számot megnövelhetjük ugyanannyival úgy, hogy $3n$ legyen a kapott számok legnagyobbika. Minthogy e növelés a számok különbségeit nem változtatja meg, elegendő avval az esettel foglalkoznunk, midőn $3n$ szerepel a kiválasztott számok között. E feltevés mellett a következőképpen okoskodunk:

Ha az $n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ számok egyike szerepel a kiválasztottak között, úgy ennek és $3n$-nek különbsége n-nél nagyobb, de $2n$-nél kisebb.

Ha viszont a mondott számok egyike sem szerepel, akkor az

$$1, 2n; 2, 2n+1; 3, 2n+2; \ldots; n, 3n-1$$

számpárok elemei közül kell további $n+1$ darabot kiválasztanunk. E kiválasztás csak úgy lehetséges, hogy valamelyik számpárnak mindkét elemét kiválasztjuk, hiszen összesen csak n számpár van. Így tehát van a kiválasztott számok között kettő, melyeknek különbsége $2n-1$, vagyis $2n$-nél kisebb s egyben n-nél nagyobb, hiszen $n>1$ feltevés mellett $n<2n-1$.

IV. megoldás: Helyezzük el az első $3n$ természetes számot egy kör kerületén növekvő rendben s egyenlő közökben. Az óralap szemlélteti ezt az elhelyezést az $n=4$ esetben.

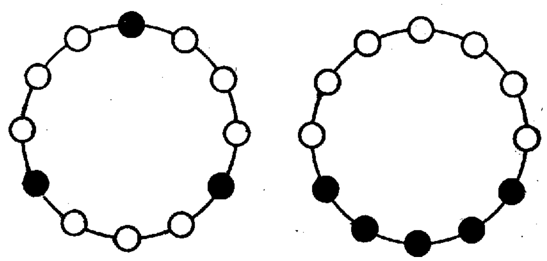
Két szám akkor elégíti ki a feladat kívánalmát, ha a kisebbiktől növekvő számok irányában haladó, s a nagyobbikhoz vezető körívnek hossza harmadkörnél nagyobb s a kör kétharmadánál kisebb. Ez a megkötés azonban egy körívre s az azt teljes körré kiegészítő körívre csak egyszerre teljesülhet, és ha két egymást teljes körré kiegészítő körívnek mindegyike nagyobb a harmadkörnél, akkor már eleve kisebbek a kör kétharmadánál. Így tehát két szám akkor elégíti ki a feladat kívánalmát, ha a két számot összekötő mindkét körív nagyobb a harmadkörnél.

Meggondolásaink alapján a feladatnak a következő új alakot adhatjuk: *Egy kör kerületén egyenlő közökkel* $3n$ *pont helyezkedik el, s ezek közül kiválasztunk* $n+2$ *darabot. Bizonyítandó, hogy mindig van a kiválasztott pontok között kettő, melyeket két, a harmadkörnél nagyobb körív köt össze.*

Vizsgáljuk, hogyan lehet a $3n$ pont közül egyeseket kiválasztani anélkül, hogy volna közöttük kettő, melyeket két, a harmadkörnél hosszabb körív köt össze. Ez a tilalom akként is szövegezhető, hogy a kiválasztott pontokkal szemben elhelyezkedő harmadkörívek belsejéből nem szabad pontot kiválasztanunk.

Nevezzük szabad körívnek az olyat, amelyet kiválasztott pontok határolnak, s amelyiknek belsejében nincs kiválasztott pont. A tilalom előbbi megfogalmazása szerint kell lennie legalább harmadkör-hosszúságú szabad körívnek. Viszont ugyancsak a tilalom szerint nem szabad harmadkörnél hosszabb s a kör kétharmadánál rövidebb szabad körívnek lennie, hiszen egy ilyennek végpontjai áthágják a tilalmat. Megengedett kiválasztásoknál tehát csak a következő két eset lehetséges: a szabad körívek maximuma vagy éppen harmadkörív, vagy pedig a kör két harmadát is eléri.

Ha a legnagyobb szabad körív harmadkör, akkor csak 3 kiválasztott pont szerepelhet (6. ábra).



6. ábra

Ilyenkor ugyanis bizonyosan van egy szabad harmadkörív. Ennek végpontjai, mint kiválasztott pontok, a kiegészítő kétharmadív belső pontjainak kiválasztását is tiltják, egyedül e kétharmadív középpontjának kiválasztását nem. Ennek a középpontnak kell is szerepelnie a kiválasztott pontok között, mert különben nem harmadkör volna a szabad körívek legnagyobbika.

Ha viszont a legnagyobb szabad körív a körnek kétharmada, vagy még nagyobb, akkor a kiválasztott pontok egy harmadkörön helyezkednek el, ennek végpontjait is beleértve. Minthogy egy harmadköríven végpontjaival együtt $n+1$ pont van, ilyenkor legfeljebb csak $n+1$ kiválasztott pont szerepelhet. Akár mind e pontokat kiválaszthatjuk, a tilalmat akkor sem hágjuk át.

Mivel $n+2$ nagyobb $(n+1)$-nél és $n>1$ feltevés mellett 3-nál is, azért $n+2$ pontot nem lehet a tilalom áthágása nélkül kiválasztani.

Megjegyzés: Könnyű előző megoldásainkat is átfogalmazni körön elhelyezkedő számokra. Ezáltal azoknak tartalma is szemléletesebbé válik. Ezt azonban az olvasóra hagyjuk.

Megoldásunk a feladat állításán túlmenően a következő eredményhez is elvezet: Minden megengedett kiválasztásnál: 1) vagy három a, $a+n$, $a+2n$ alakú szám szerepel, 2) vagy $n+1$ egymást követő szám szerepel, 3) vagy együttesen $n+1$ olyan szám szerepel, amelyeknek egyik csoportja 1-hez csatlakozó s egymást követő, másik csoportja $3n$-hez csatlakozó s egymást követő számokat tartalmaz, 4) vagy pedig csak egyesek szerepelnek az előző két eset valamelyikében megadott számok közül.

V. megoldás: A feladatnak $n=60$ esetben a következő tréfás fogalmazást adhatjuk: Egy könyvtárt déli 12-kor nyitnak és délután 3 órakor becsuknak. A könyvtárba csak pontosan kerek percidőkkor lehet belépni: első ízben pontosan 12-kor, utoljára 2 óra 59 perckor. Egyszerre csak egy ember léphet a könyvtárba. Aki a könyvtárba lép, belépése után pontosan egy órával elalszik s pontosan egy órát alszik, hacsak a könyvtár zárása ebben meg nem akadályozza. Senkit alvás *közben* a könyvtárba lépéssel zavarni nem szabad. Bizonyítandó, hogy ilyen különös előírások mellett egy napon nem járhat 62 ember a könyvtárban.

Felesleges volna részletezni, hogy ez valóban a feladat átírása.

Ha a könyvtár kapusa az első látogató érkezésekor a könyvtár óráját déli 12-re állítja vissza, akkor nyilván csak azt teszi lehetővé, hogy esetleg még többen látogathassák aznap a könyvtárt. Feltehetjük tehát, hogy az első látogató pontosan 12-kor érkezik. A következőkben három esetet különböztetünk meg.

Először avval az esettel foglalkozunk, hogy pontosan 1 órakor és pontosan 2 órakor is érkezik egy-egy látogató. Ekkor bizonyos, hogy többen nem is járnak a könyvtárban. Hiszen 12 és 1 között nem érkezhetik senki sem, mert az 2-kor biztosan aludna, s így álmát megzavarnák. Viszont 1 és 2, valamint 2 és 3 között azért nem jöhet be senki sem, mert akkor alszik a 12-kor érkező, ill. az 1-kor érkező látogató. Ebben az esetben tehát 3 látogató van.

Másodszor feltesszük, hogy pontosan 1 órakor érkezik látogató, de 2-kor nem. Ekkor bizonyos, hogy 1 óra után senki sem érkezik. Ugyanis 1 és 2 között a 12-kor érkező, viszont 2 és 3 között az 1-kor érkező látogató alszik. Ebben az esetben tehát minden látogató 12-től kezdve 1 óráig bezárólag érkezik, s így legfeljebb 61 látogató van.

Végül harmadszor feltesszük hogy pontosan 1 órakor nem érkezik látogató. Szemeljük ki ekkor azt a látogatót, aki utoljára érkezett 1 óra előtt (lehet, hogy az első látogatót kell így kiszemelnünk). A kiszemelt látogató érkezésétől számított kétórás időközön *belül* újabb látogató nem érkezhet, hiszen ez csak elalvása előtt volna lehetséges, viszont sem érkezésétől 1 óráig, sem 1 órakor nem érkezik senki sem, és 1 órától a kiszemelt látogató elalvásáig terjedő időben (ha ugyan nem az első látogatót magát szemeltük ki), már alszik az első látogató. Ezek szerint a mondott két órás időközön belül 119 belépési lehetőség kihasználatlanul kell, hogy maradjon, a látogatók a megengedett 180 lehetőségből csak a többit használhatták ki. Ebben az esetben tehát ugyancsak legfeljebb 61 látogató van. Egybevetve megállapítjuk, hogy mindenképpen csak legfeljebb 61 ember járhat egy napon a könyvtárban. Nyilván helyes marad okoskodásunk akkor is, ha az órát nem 60, hanem n percre osztjuk fel. Egyedül az lényeges, hogy a 61 helyébe lépő $n+1$ ne legyen 3-nál kisebb, vagyis hogy az $n>1$ feltétel teljesüljön.