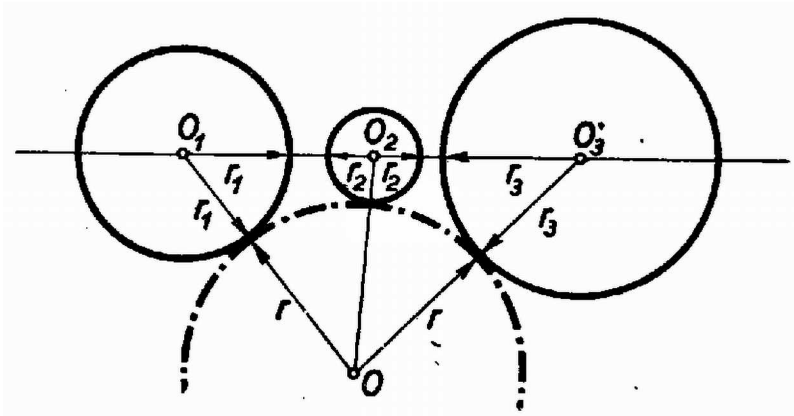
I. megoldás: Jelölje O_1, O_2, O_3 a három adott kör középpontját, s legyen közülük O_2 a másik kettő között. A három kör sugarát rendre r_1, r_2, r_3 jelöli. A negyedik kör középpontja és sugara legyen O és r.



1. ábra

A negyedik kör nem lehet egyik adott körnek sem a belsejében, mert akkor nem érinthetné a másik kettőt is. Nem kell foglalkoznunk avval az esettel sem, midőn a három adott körnek valamelyike a negyedik kört belülről érinti, mert ez esetben a negyedik kör sugara a belülről érintő kör sugaránál nagyobb, s így nem lehet a négy körsugár közül a legkisebb. Ezért csak avval az esettel foglalkozunk, amikor a negyedik kör kívülről érinti a három adott kört (1. ábra).

Az $OO_1O_3\Delta$ oldalaira

$$OO_1 + OO_3 > O_1O_3.$$

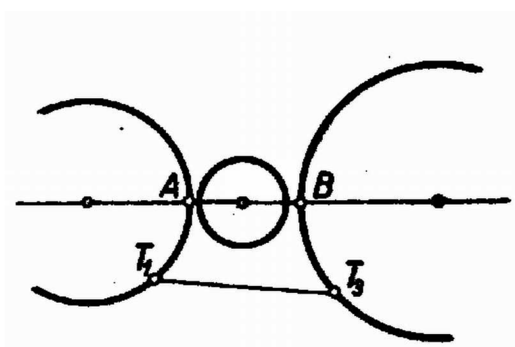
Minthogy a körök kívülről érintik egymást, $OO_1 = r + r_1$ és $OO_3 = r + r_3$. Mivel a három adott kör közül nincs kettőnek közös belső pontja, $O_1O_3 \geq r_1 + 2r_2 + r_3$, hiszen az O_1O_3 szakasz tartalmazza a két szélső kör sugarát s a középsőnek átmérőjét, s e sugarak és az átmérő egymást még részben sem fedik. Igaz ez akkor is, ha a középső kör érinti a két szélsőnek valamelyikét, vagy akár mindkettőt is. Az utóbbi esetben az egyenlőség jele érvényes.

Fenti egyenlőtlenségünk alapján tehát

$$r_1 + 2r + r_3 > r_1 + 2r_2 + r_3,$$

amiből $r > r_2$ adódik. Az r sugár tehát r_1, r_2, r_3 mindegyikénél kisebb nem lehet.

II. megoldás: Jelölje A és B a két szélső körnek egymáshoz legközelebb eső pontjait, tehát a centrális egyenesnek s a két szélső körnek egy-egy metszéspontját (2. ábra).



2. ábra

Minthogy az AB távolság a középső kör átmérőjét tartalmazza,

$$AB \geq 2r_2.$$

Jelölje T_1 és T_3 a negyedik körnek s a két szélső körnek közös pontjait. Minthogy T_1T_3 a negyedik körnek húrja,

$$2r \geq T_1T_3.$$

A és B megválasztásából viszont következik, hogy

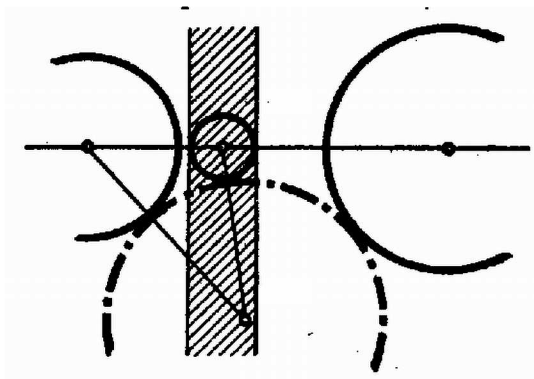
$$T_1T_3 \geq AB.$$

Egyenlőtlenségeink összevetéséből

$$2r \geq 2r_2,$$

azaz $r \geq r_2$ adódik. Ez pedig a feladat állítását igazolja.

III. megoldás: Emeljünk a centrális egyenesnek s a középső körnek metszéspontjaiban merőlegeseket a centrálisra (3. ábra).

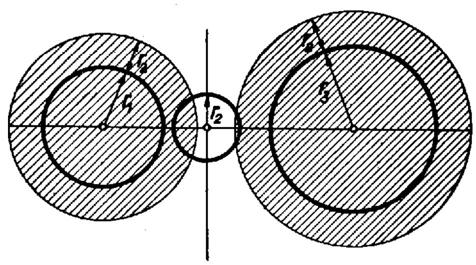


3. ábra

E két párhuzamos egyenes egy síksávot fog közre. A három adott kör közül a két szélső ennek a sávnak más-más oldalán van. Minthogy a negyedik körnek van közös pontja mindkét szélső körrel, azért tudjuk, hogy a negyedik kör a sávnak mindkét partját eléri, átmérője tehát a sáv szélességénél, sugara pedig annak felénél, vagyis a középső kör sugaránál kisebb nem lehet.

IV. megoldás: Keressük az olyan negyedik körnek középpontját, amelyiknek van a két szélső körrel egy-egy közös pontja, s amelyiknek sugara a középső kör sugaránál kisebb.

Ha a két szélső kör sugarát a középső kör sugarával megnöveljük, olyan köröket kapunk, amelyeknek mindegyike belsejében kell, hogy tartalmazza a kívánt tulajdonságú negyedik körnek középpontját (4. ábra).

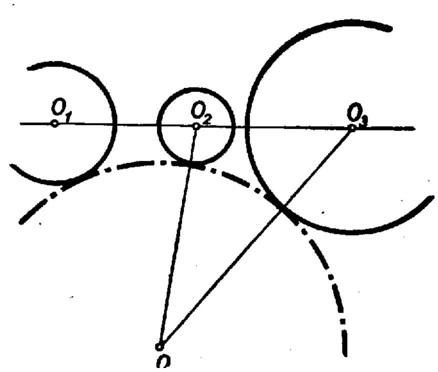


4. ábra

Hiszen e körök valamelyikén kívül lévő pont körül r_2-nél kisebb sugárral írt kör nem éri a megfelelő szélső kört.

Emeljünk a középső kör középpontjában merőlegest a centrális egyenesre. Minthogy éppen a középső kör sugarával növeltük az előbb a sugarakat, azért a megnövelt körök a most szerkesztett merőleges egyenesnek más-más oldalán vannak. A megnövelt köröknek tehát nincs közös belső pontjuk, s így kívánt tulajdonságú negyedik kör sincs.

V. megoldás: Kössük össze a negyedik kör O középpontját a középső kör O_2 középpontjával. Az $OO_2O_1\sphericalangle$ és $OO_2O_3\sphericalangle$ összege 180°, s így mindkettő nem lehet 90°-nál kisebb (5. ábra).



5. ábra

Legyen pl. $OO_2O_3\sphericalangle \geq 90°$. Ekkor az $OO_2O_3\Delta$-ben ez a legnagyobb szög, s ezért OO_3 a háromszög legnagyobb oldala, tehát

$$OO_3 > O_2O_3.$$

Minthogy az O és O_3 középpontú köröknek van közös pontjuk, $OO_3 \leq r + r_3$. Mivel az O_2 és O_3 középpontú köröknek nincs közös belső pontjuk, $O_2O_3 \geq r_2 + r_3$. Így tehát

$$r + r_3 > r_2 + r_3,$$

azaz $r > r_2$, tehát r nem lehet r_1, r_2, r_3 mindegyikénél kisebb.

Megjegyzések: 1. Végső következtetésünk mindegyik megoldásnál az volt, hogy r nem lehet a legkisebb a négy körsugár közül, azaz nem lehet a másik három mindegyikénél kisebb. Megoldásaink azt is bizonyítják, hogy r nem lehet r_2-nél kisebb sem.

2. Az is igaz, hogy r nem lehet a négy körsugár közül még a legkisebbek között sem, azaz van a másik három sugár között r-nél kisebb. Sőt bizonyos, hogy r_2 kisebb r-nél. Ezt az első és ötödik megoldás ki is mondja. A többi három megoldás okoskodása csekély toldással ugyancsak elvezet ehhez az eredményhez.

3. Az első megoldás használta csak ki azt, hogy a negyedik kör érinti a két szélsőt. A többi arra épített, hogy a negyedik körnek van közös pontja a szélső körökkel, tehát azt is megengedte, hogy a negyedik kör messe a szélsőket. Az első megoldás lényegtelen módosítással ugyanilyenné alakítható.

4. Csak az első és ötödik megoldás használta ki valamennyire azt, hogy a negyedik kör érinti a középsőt. Ez abban nyilvánult, hogy e megoldások OO_1O_3, ill. OO_2O_3 háromszögről szóltak, tehát feltételezték hogy O nincs rajt a centrális egyenesen. Ez valóban nem következhetik be, ha a negyedik körnek van közös pontja a szélső körökkel, és érinti a középsőt. Így érthető az is, hogy éppen ezt a két megoldást kellett 2. megjegyzésünkben kiemelnünk.

5. A második megoldásból kiolvashatjuk, hogy $r = r_2$ csak akkor állhat fenn, ha mindenütt az egyenlőség jele volt érvényes: ha tehát AB átmérője a középső körnek, ha T_1T_3 átmérője a negyedik körnek, ha továbbá T_1T_3 és AB azonos. Ez pedig azt jelenti, hogy a középső kör érinti a két szélsőt, és a negyedik körrel azonos. Ugyanehhez az eredményhez a többi megoldás alapján is eljuthatunk.

6. Megjegyzéseinket összefoglalva a feladat állításának következő általánosítását mondhatjuk ki: *Három kör közül kettőnek-kettőnek nincs közös belső pontja, s középpontjaik egy egyenesen vannak; ha egy negyedik körnek van közös pontja e három kör közül a két szélsőnek mindegyikével, akkor e negyedik körnek sugara nem lehet a középső kör sugaránál kisebb, és egyenlő is csak akkor lehet azzal, ha a középső kör érinti a két szélsőt, s ha továbbá a negyedik kör a középső körrel azonos.*