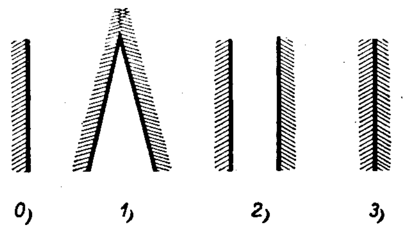
I. megoldás: Két félsík elhelyezése után az 5. ábrában feltüntetett 4 helyzet állhat elő, ahol a határegyenes sraffozott oldala jelenti a félsíkot.

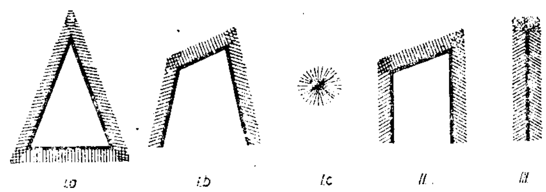


5. ábra

A (0) helyzetben a két határegyenes párhuzamos és az egyik félsík a másik félsíkot teljesen elfedi, tehát ez utóbbi máris felesleges. Ezzel a helyzettel már nem kell foglalkoznunk.

Tehát csak az (1), (2) és (3) eseteket kell a továbbiakban figyelembe venni, mikor egy ék, egy síksáv, illetőleg egy egyenes (a két félsík közös határegyenese) marad fedetlenül.

A harmadik félsík hozzáillesztésével (1)-ből előállhat az I/a, I/b és I/c helyzet, (2)-ből a II. helyzet és (3)-ból a III. helyzet (6. ábra).



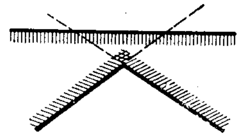
6. ábra

Az I/c eset (amidőn a 3 határegyenes egy pontban metszi egymást és így csak az egyetlen pont marad feladatunk értelmében fedetlen) az egyik félsíknak egy tetszésszerinti kis elhúzásával mindig visszavezethető az I/a esetre. Ugyanígy a III. helyzet is visszavezethető a II. helyzetre a közös határegyenessel bíró két félsíknak egy tetszésszerinti kicsiny széthúzásával. A negyedik félsík elhelyezésénél tehát már csak az I/a, I/b és II. esetekkel kell foglalkoznunk.

A fedetlen részeket teljesen lefedő negyedik félsík határegyenese vagy párhuzamos az első 3 sík valamelyikének határegyenesével vagy nem.

Ha párhuzamos, akkor az a félsík, melynek határegyenesével párhuzamos, a 4. félsíkkal együtt máris lefedi a teljes síkot.

Ha nem párhuzamos, akkor van az első 3 félsík által fedetlenül hagyott résznek egy szögpontja, mely a negyedik félsík határegyeneséhez a legközelebb fekszik. Ez esetben a 4. félsík azzal a két félsíkkal együtt, melyeknek határegyenesei a legközelebb fekvő szögpontban metszik egymást, nyilván teljesen lefedi a síkot (7. ábra).



7. ábra

II. megoldás: Ha tételünk nem volna igaz, akkor a négy lefedő félsík közül rendre egy-egy félsíkot elhagyva fedetlenül marad minden egyes alkalommal legalább egy-egy pont, ami azt jelenti, hogy van a síkban négy olyan pont: P_1, P_2, P_3, P_4 melyek mindegyike csak egyetlenegy félsíkkal van lefedve és ugyanakkor mindegyik félsik e 4 pont közül egy és csakis egy pontot fed le. Be fogjuk bizonyítani, hogy ilyen négy pont nem létezik.

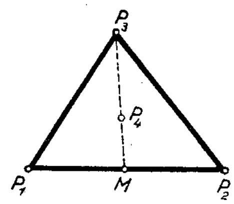
Segédtétel: E négy pont közül három nem lehet egy egyenesen, mert az esetben a középső pont nem fedhető le egy félsíkkal úgy, hogy ugyanakkor a két szélső pont valamelyike ne kerüljön lefedésbe.

Marad tehát a 4 pont elhelyezésére a következő két eset:

a) Egy pont a másik három pont alkotta háromszögön belül van.

b) A négy pont egy konvex négyszöget alkot.

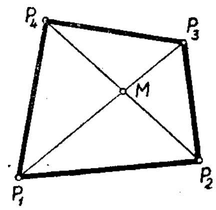
Az *a)* esetben jelöljük P_4-gyel a belső pontot és messe a P_3P_4 egyenes a szemben fekvő P_1P_2 oldalt M-ben (8. ábra).



8. ábra

Segédtételünk értelmében a P_4-et lefedő félsíknak le kell fednie vagy a P_3, vagy az M pontot is. Ugyancsak segédtételünkből következik, hogy minden M-et lefedő félsík P_1 és P_2 pontok valamelyikét lefedi. Így minden P_4-et lefedő félsík szükségképpen lefed még legalább egy pontot P_1, P_2 és P_3 közül.

b) esetben húzzuk meg a két átlót, ezek metszéspontja legyen M (9. ábra).



9. ábra

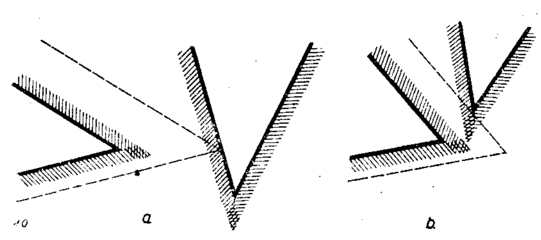
Segédtételünk értelmében minden M-et lefedő félsík fedi a P_1P_3 átló egyik végpontját, és ugyanakkor a P_2P_4 átló egyik végpontját is. Tehát minden M-et lefedő félsík *legalább két P pontot* fed le.

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

III. megoldás: Ha a 4 lefedő félsíkot két párban tekintjük, akkor feltehetjük, hogy egy-egy pár az I. megoldásban közölt (1) és (2) eset egyikét képviseli, mivel a (3) eset a (2)-re vezethető vissza.

Ha a két pár egyike a (2) esethez tartozik, akkor – tekintve, hogy a két félsíkpár együtt lefedi az egész síkot – az egyik pár által le nem fedett tartomány *teljesen* a síksáv egyik oldalán van és így a síksáv másik oldalát alkotó félsík elhagyható (lásd I. megoldás, 7. ábra).

Hátra van még az (1) – (1) eset, vagyis amikor mindkét félsíkpár éket alkot. Itt ismét fennáll az, hogy ha két határegyenes (szögszár) párhuzamos, akkor e két határegyéneshez tartozó két félsík vagy lefedi a teljes síkot, vagy pedig e két félsík közül az egyik felesleges. Ha nincs párhuzamos határegyenes, akkor az egyik ék két félsíkjának elhúzásával (oly módon, hogy a mozgó félsíkok határegyenesei mindig párhuzamosak maradnak az eredeti határegyenesekkel) mindig elérhető az a helyzet, mikor a mozgó ék csúcspontja beleütközik a nyugvó ék egyik szárába (10/a ábra), vagy fordítva a mozgó ék egyik szára ütközik be a nyugvó ék csúcspontjába (10/b ábra).



10. ábra

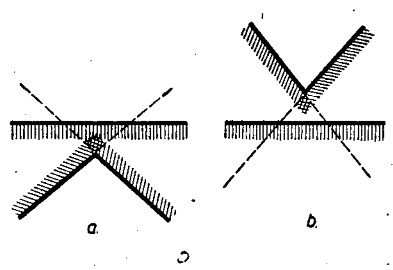
Mindkét esetben e csúcsponton átmenő 3 határegyeneshez tartozó 3 félsík már lefedi a teljes síkot, annál inkább áll fenn a lefedés a félsíkok visszatolása után. (Így bizonyította be a tételt a 2. díjnyertes, Kálmán Lajos.)

IV. megoldás: Ha egy egyenes véges számú félegyenessel teljesen le van fedve, akkor a félegyenesek két csoportba oszthatók aszerint, ahogy e félegyenesek a pozitív, illetőleg negatív irányban fedik le az egyenest a végtelenig. Mindegyik csoportba legalább egy félegyenes tartozik, mert *véges* számú *egy*irányú félegyenessel nem lehet egy egyenest teljesen lefedni. Ha az egyenest teljesen lefedő véges számú, pozitív irányú és negatív irányú félegyenesek közül kiválasztjuk azt az egy-egy félegyenest, mely az összes többi, vele egyirányú, félegyenest lefedi, akkor e 2 ellenkező irányú félegyenes már lefedi az egész egyenest. Tehát feladatunkban bármely félsík határegyenesét mindig 2 másik félsík már lefedi.

Most 3 esetet kell megkülönböztetni.

Ha a két lefedő félsík határegyenesei párhuzamosak egymással, akkor e két félsík már lefedi az egész síkot.

Ha a két lefedő félsík határegyeneseinek metszéspontja az első sík által lefedett tartományba esik, akkor ez a 3 félsík teljesen lefedi az egész síkot (11/a ábra).



11. ábra

Végül, ha fenti metszéspont az első félsík által le nem fedett részbe esik, akkor az első félsík elhagyható (11/b ábra).

Megjegyzés: Ismeretes a koordináta geometriából, hogy $ax + by + c = 0$ egy egyenes egyenlete. Minden x_1, y_1 számpárnak, melyre nézve $ax_1 + by_1 + c = 0$, megfelel egy pont az egyenesen. Viszont, ha az $ax_1 + by_1 + c > 0$, akkor x_1, y_1 pont az $ax + by + c = 0$ egyenesnek azon az oldalán van, amelyen az origo, ha $c > 0$, és ellenkező oldalán, ha $c < 0$. Ez azt jelenti, hogy mindazon pontok összessége, melyek kielégítik az $ax + by + c > 0$ egyenlőtlenséget, egy félsík belső pontjai, mely félsíknak határegyenese az $ax + by + c = 0$ egyenes.

Ezek szerint most már bebizonyított tételünk így is fogalmazható:

Ha az alábbi négy egyenlőtlenségre

$$a_1x + b_1y + c_1 > 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 > 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 > 0$$
$$a_4x + b_4y + c_4 > 0$$

fennáll, hogy *bármilyen* x, y számpár *legalább egy* egyenlőtlenséget kielégít, akkor mindig található a négy egyenlőtlenség között *egy* olyan, melyet elhagyva, az előbbi állítás a megmaradó három egyenlőtlenségre is fennáll. E tétel közvetlen bizonyítása nem volna egyszerű.