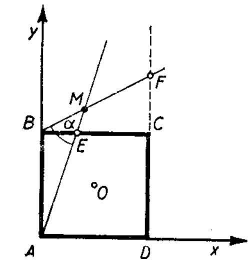
I. megoldás: Helyezzük a négyzet A csúcspontját derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjába, az AB oldalt a pozitív Y tengelyre az AD oldalt a pozitív X tengelyre és tekintsük a négyzetoldalt egységnek (tehát $a=1$), akkor feladatunk szerint az AE egyenes egyenlete $y=3x$ és a BF egyenes egyenlete $y=1+\frac{x}{2}$ (1. ábra).



1. ábra

E két egyenes M metszéspontjának koordinátái:

$$x=0{,}4 \quad \text{és} \quad y=1{,}2$$

Számítsuk ki ezen M pont távolságának négyzetét a négyzet $O(0{,}5,\ 0{,}5)$ középpontjától

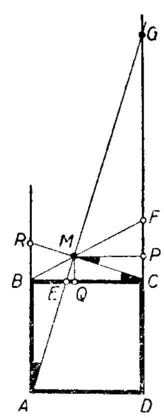
$$OM^2=(0{,}5-0{,}4)^2+(0{,}5-1{,}2)^2=0{,}1^2+0{,}7^2=0{,}01+0{,}49=$$
$$0{,}5=0{,}5^2+0{,}5^2=OA^2.$$

Tehát $OM=OA$. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

II. megoldás: Mivel a kerületi szögek tétele alapján a négyzet köré írt kör bármely pontjától a négyzet oldala 45° (illetve az egyik 135°) alatt látszik, azért tételünk bizonyítást nyert, ha kimutatjuk, hogy $AMB\sphericalangle=\alpha=45^\circ$ (1. ábra). A szögszárak iránytangensei az előbbiek szerint 3 és $\frac{1}{2}$, tehát

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1, \quad \text{vagyis tényleg} \quad \alpha=45^\circ.$$

III. megoldás: Jelöljük az M pont távolságát a CD négyzetoldaltól $MP=a$-val, és a BC négyzetoldaltól mért távolságát $MQ=b$-vel. Az AE egyenes messe a CD négyzetoldal meghosszabbítását G-ben (2. ábra).



2. ábra

Nyilvánvaló, hogy $DG=3$ és mivel DF a feladat értelmében 1,5, ezért $FG=1{,}5$.
Az $MAB_\triangle\sim MGF_\triangle$ és az oldalak aránya

$$AB:GF=1:1{,}5=AM:MG.$$

Ebből következik, hogy $AG:MG=2{,}5:1{,}5=AD:MP=1:a$, vagyis

$$a=\frac{1{,}5}{2{,}5}=0{,}6.$$

Hasonlóképpen $BFC_\Delta \sim BMQ_\Delta$ és így

$$MQ : FC = BM : BF = AM : AG = 1 : 2{,}5.$$

Ebből $MQ = b = \dfrac{FC}{2{,}5} = \dfrac{0{,}5}{2{,}5} = 0{,}2$.

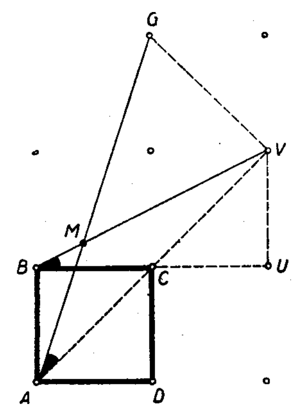
A befogók aránya az, MPC derékszögű háromszögben $\left(\dfrac{0{,}6}{0{,}2}\right)$ ugyanaz, mint az ABE derékszögű háromszögben, miből következik, hogy $PMC\sphericalangle = BAE\sphericalangle$. Mivel pedig $PM \perp AB$, azért a másik szögszár MC is $\perp AE$, vagyis $MC \perp MA$, ami azt jelenti, hogy az M pont rajta van az AC négyzetátló fölé, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön, amely Thales-kör egyszersmind a négyzet köré írt kör. (Az MC merőlegességére lehetett volna $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{0{,}2}{0{,}6} = -\dfrac{1}{3}$ iránytangensből is következtetni, de nem akartunk ebbe a megoldásba, sem trigonometriát, sem koordináta geometriát közvetlenül bevonni.)

IV. megoldás: Messe az AE egyenes a CD oldal meghosszabbítását ismét G-ben és a CM egyenes az AB oldal meghosszabbítását R-ben (2. ábra), akkor az előbbiek alapján

$$BR : BA = FC : FG = 0{,}5 : 1{,}5 = 1 : 3,$$

amiből $BR = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{BC}{3}$. Ebből következik, hogy $ABE_\Delta \sim CBR_\Delta$, vagyis $MAB\sphericalangle = MCB\sphericalangle$. De ha két kerületi szög egyenlő és egy-egy száruknak metszéspontja (B) a körön van, akkor a másik két szár metszéspontja (M) is e körön van. (Ez az I. díjnyertes, Szekerka Pál bizonyítása.)

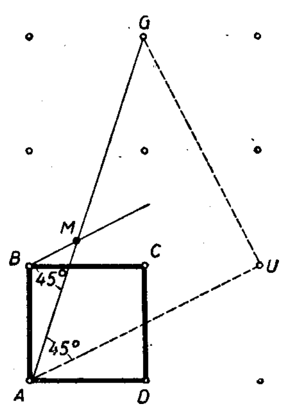
V. megoldás: Helyezzük egész ábránkat egy négyzetrácsra úgy, hogy $ABCD$ négyzetünk csúcspontjai egy legkisebb rácsnégyzet csúcspontjaival essenek egybe.



3. ábra

A BC oldalt meghosszabbítva az U rácspontig, az AC átlót pedig a V rácspontig (3. ábra), a keletkezett BUV derékszögű háromszög hasonló az AVG derékszögű háromszöghöz, mert mindkettőben a befogók aránya $2:1$. Ebből következik, hogy az utóbbi háromszög A-nál fekvő szöge egyenlő az előbbi B-nél fekvő szögével, amiből viszont a kerületi szögek tétele alapján (hasonlóképpen mint a IV. megoldásban) következik, hogy M rajta van a négyzet köré írt körön.

VI. megoldás: Húzzuk meg az AU egyenest (4. ábra), ez nyilván párhuzamos a BM egyenessel, mert mindkettő iránytangense $\dfrac{1}{2}$. Az AUG háromszög nyilván derékszögű egyenlő szárú és így $A\sphericalangle$-e $45°$-os.



4. ábra

Ennek váltószöge, az $AMB\sphericalangle$ tehát szintén 45°-os, amivel tételünket bebizonyítottuk. (L. a II. megoldást.)