A feladat megoldása tulajdonképpen nem kíván különösebb ötleteket, csak kitartóan végig kell próbálni az összes lehetőségeket.

Hogy rövidebben fejezhessük ki magunkat, néhány rövid jelölést fogunk használni. Amit az együtthatókról tudunk, egy keretben fogjuk feltüntetni:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \end{array}}$$

Ha egy együtthatóról azt tudjuk, hogy páros egészszám, akkor a helyébe egy 2-est írunk, ha azt tudjuk, hogy páratlan egészszám, akkor 1-est; ha pedig az derül ki, hogy két együttható összege páros egészszám, akkor ezek helyét egy $\circ - \circ$ jellel kötjük össze. Az üresen hagyott helyek azt jelentik, hogy a megfelelő együtthatókról még nem derült ki semmi. $(x, y) = (a, b)$-vel azt jelöljük, hogy x helyébe a-t, y helyébe b-t helyettesítünk.

I. megoldás: 1°. $(x, y) = (0, 0)$ helyettesítéssel, azt kapjuk, hogy c_1 és c_2 közül valamelyik páros egészszám. Feltehetjük, hogy

c_1 ez: $\boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \end{array}}$

2°. Helyettesítsünk $(x, y) = (1, 0)$-t. Ha $a_1 + c_1$ páros, a_1 is páros, ha nem akkor $a_2 + c_2$ páros:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ & & \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ \circ & \!\!-\!\!-\!\! & \circ \end{array}}$$

3°. $(x, y) = (-1, 0)$ helyettesítésnél az első esetben biztos páros az első kifejezés, a másodikban mivel $-a_1 + c_1$ nem lehet páros (akkor $a_1 + c_1$ is az volna), tehát $-a_2 + c_2$ kell, hogy páros legyen. Ez csak úgy lehet, ha vagy a_2 is c_2 is páros egészszám, vagy mindkettő páratlan:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ & & \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 2 & & 2 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 1 & & 1 \end{array}}$$

4°. $(x, y) = (0, 1)$. Az első esetben, ha $b_1 + c_1$ páros b_1 is az, ha nem akkor $b_2 + c_2$ páros. A másodikban ha $b_1 + c_1$ páros b_1 is az, ha nem akkor $b_2 + c_2$ páros, de akkor b_2 páros egészszám kell legyen. A harmadikban ha $b_1 + c_1$ páros, akkor b_1-nek páros egésznek kell lennie. Ha nem, akkor $b_2 + c_2$ páros, de akkor b_2 páratlan egészszám:

$$1\,\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ & & \end{array}} \; 2\,\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ & \circ\!-\!- & \circ \end{array}} \; 3\,\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ 2 & & 2 \end{array}} \; 4\,\boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}} \; 5\,\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ 1 & & 1 \end{array}} \; 6\,\boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

Az 1. és 4. esetben bármely egész (x, y)-ra az egyik kifejezés értéke páros lesz. Ezeket az eseteket nem is vizsgáljuk tovább.

5°. Legyen $(x, y) = (0, -1)$. 2.-ben $-b_1 + c_1$ nem lehet páros, mert akkor b_1 és $b_1 + c_1$ is páros lenne. Így $-b_2 + c_2$ páros, tehát vagy mindkettő páros egészszám, vagy mindkettő páratlan. Az első lehetőség csak a két kifejezés sorrendjében különbözik a 3. esettől, így nem tárgyaljuk külön. 3.-ban és 5.-ben az első, 6.-ban a második kifejezés biztosan páros:

$$1\,\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ & 1 & 1 \end{array}} \quad 2\,\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ 2 & & 2 \end{array}} \quad 3\,\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ 1 & & 1 \end{array}} \quad 4\,\boxed{\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

6°. Legyen $(x, y) = (1, 1)$ 1.-ben $a_1 + b_1 + c_1$ nem lehet páros, mert feltettük (4.-nél), hogy $b_1 + c_1$ nem páros, tehát kell, hogy $a_2 + b_2 + c_2$ legyen páros. $b_2 + c_2$ páros, így a_2 is páros. 2.-ben hasonlóan kell, hogy $a_2 + b_2 + c_2$ legyen páros s így b_2 páros egészszám, amivel viszont lényegében a már elintézett esetre jutunk. 3.-ban sem lehet $a_1 + b_1 + c_1$ páros, így $a_2 + b_2 + c_2$ az, amiből következik, hogy b_2 páros egésszám. 4.-ben $a_2 + b_2 + c_2$ páratlan egészszám, tehát biztosan $a_1 + b_1 + c_1$ páros, tehát $a_1 + b_1$ is páros. a_1-ről viszont 2.-ben feltettük, hogy nem páros (t. i. azzal, hogy $a_1 + c_1$ nem páros).

$$1\,\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}} \quad 2\,\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}} \quad 3\,\boxed{\begin{array}{ccc} \circ\!-\!- & \circ & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

A bizonyítandó állítást ezzel már meg is kaptuk, hisz itt minden esetben a második kifejezés együtthatói egészszámok. A további helyettesítések csak a táblázatok teljes kitöltéséért történnek:

7°. Legyen $(x, y) = (2, 0)$. 1.-ben $2a_1 + c_1$ biztos páros, így nem tudunk meg újabbat. 2.-ben az első kifejezésnek kell párosnak lennie, tehát $2a_1 + c_1$-nek, s így $2a_1$-nek is. a_1 tehát egész. Új eredményt csak akkor kapunk, ha a_1 páratlan. 3.-ban szintén az első kifejezés s így $2a_1$ külön is páros, a_1 viszont nem az, így a_1 és vele együtt b_1 is páratlan egészszám:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

8°. Az első esetben b_1 megismerésére helyettesítsünk $(x, y) = (0, 2)$-t. $2b_2 + c_2$ páratlan, így $2b_1 + c_1$, tehát $2b_1$ is páros, b_1 tehát egészszám. Ha páros, újat nem kapunk, tehát újabb lehetőség csak az, ha b_1 páratlan.

2	1	2
2	1	1

Így a következő öt eset lehetséges:

2	2	2

2	2	2

1	1	2
1	1	1

1	2	2
1	2	1

2	1	2
2	1	1

Az első kettőben csak a két elsőfokú kifejezés sorrendje, az utolsó kettőben pedig csak x és y szerepe van felcserélve. Így ezek nem lényegesen különböző esetek. Az első két esetben minden egész x, y párra ugyanaz a kifejezés páros. A harmadikban, ha x is y is páros, vagy mindkettő páratlan, akkor az első, ha egyik páros, másik páratlan, akkor a második kifejezés lesz páros. A negyedik esetben páros x-re, az ötödikben páros y-ra az első kifejezés lesz páros, y illetőleg x párosságától függetlenül; páratlan x-re ill. y-ra viszont, a második.

Ez a megoldás nehézségekbe nem ütközik, de fáradságos. Ilyenkor igyekszünk a próbálgatásokat lehetőleg ügyesen elrendezni, hogy kevés esetet szétválasztva gyorsan és áttekinthető módon juthassunk e] a kívánt eredményhez.

II. megoldás: Tekintsük az $(1, 0)$, $(0, 0)$ és $(-1, 0)$ helyettesítéseket. A három helyettesítés közül legalább valamelyik kettőre ugyanannak a kifejezésnek kell páros egészszámot adnia, mert összesen két kifejezésünk van. Bármelyik két helyettesítésre is lesz e kifejezés páros, biztos, hogy benne a és c egészszámok.

Ugyanezzel az okoskodással adódik a $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$ helyettesítések segítségével, hogy valamelyik kifejezésben b és c egészszám.

Ha mindkétszer ugyanarról a kifejezésről van szó, akkor a is b is c is egészszám. Ha a és c az egyik kifejezésben bizonyul egésznek, b és c viszont a másikban, akkor $(1, 1)$ behelyettesítésével látjuk, hogy valamelyik kifejezésben $a + b + c$ is egész.

Mivel két együtthatóról már tudjuk, hogy külön-külön egészszám, így következik, hogy a harmadiknak külön is egésznek kell lennie, így minden esetben valamelyik kifejezésben a is b is c is, egészszám.

III. megoldás: Tekintsünk a számsíkon 5 pontot: a $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ $(-1, 0)$ és $(0, 0)$ pontokat. Ha (x, y) helyébe ezt az öt értéket helyettesítjük, valamelyik kifejezés mindegyik esetben páros egész értéket ad, így bizonyos, hogy az öt helyettesítés közül háromra ugyanaz a kifejezés lesz páros. Jelöljük együtthatóit index nélkül a, b, c-vel. Legyen a három helyettesítés (x_1, y_1), (x_2, y_2) és (x_3, y_3). Ez esetben $ax_1 + by_1 + c = 2A$, $ax_2 + by_2 + c = 2B$, $ax_3 + by_3 + c = 2C$, ahol A, B és C egészszámok.

Szorozzuk meg az első egyenletet $(y_2 - y_3)$-mal, a másodikat $(y_3 - y_1)$-gyel, a harmadikat $(y_1 - y_2)$-vel és adjuk őket össze. Ekkor b és c szorzója éppen 0 lesz. A jobboldalon pedig újra páros szám keletkezik. Jelöljük $2D$-vel:

$$a\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] = 2D.$$

Ha a számpárokat pontok koordinátáinak fogjuk fel, akkor a szorzója éppen a három pont által alkotott háromszög kétszeres területe, ezt $2T$-vel jelölve, egyenletünk ilyen alakú lesz: $a \cdot 2T = 2D$. A fenti egyenleteket sorra $(x_2 - x_3)$-mal, $(x_3 - x_1)$-gyel, $(x_1 - x_2)$-vel szorozva és összeadva hasonlóan nyerjük, hogy $b \cdot 2T = 2E$, ahol E egészszám. Nézzük meg, most az öt számpárt ábrázoló pontokat. Ezek közül minden módon kiválasztva hármat vagy 1, vagy $\dfrac{1}{2}$ területű háromszöget kapunk, vagy egy egyenesbe esik a három pont. Tehát $2T$ értéke 2, 1 vagy 0. Első két esetben $a = \dfrac{2D}{2T}$ és $b = \dfrac{2E}{2T}$ s így velük együtt $c = 2A - ax_1 - by_1$ is egészszámok. Ha a három pont egy egyenesre esik és a másik két pontnak megfelelő két helyettesítésre a másik kifejezés ad páros értéket, akkor végezzük el még az $(1, 1)$ helyettesítést. Ha erre ismét az első kifejezés lesz páros, akkor a most hozzávett pont és a 3 egy egyenesen sorakozó pont közül a két szélső alkot egy 1 területű háromszöget, ha pedig itt a második kifejezés értéke páros, akkor ez a pont és az ötből kimaradó két pont alkot egy ugyanilyen háromszöget. Ezek valamelyikével ismételhetjük tehát meg a fenti gondolatmenetet. Valamelyik kifejezésnek tehát mindegyik esetben mindhárom együtthatója egész.