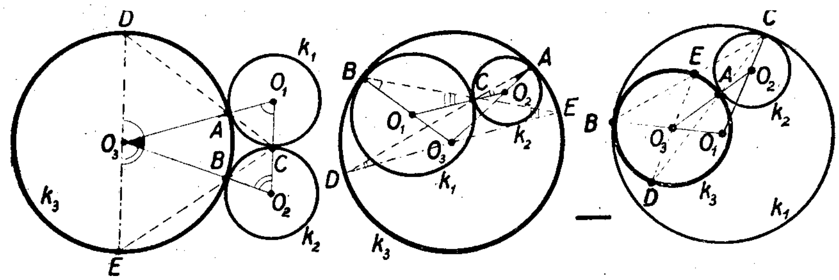
E feladat megoldói közül egy kivételével, senki nem látta világosan, hogy három különböző esetet kell megvizsgálni: midőn a három kör kívülről érinti egymást, midőn k_1 és k_2 a k_3 kör belsejében van és midőn k_3 az egyik kört belülről, a másikat kívülről érinti. A továbbiakban hol egyik, hol másik, helyzetben tárgyaljuk a bizonyítást utalva a többi esetekben fellépő módosításra. Használni fogjuk a következő jelöléseket: a körök középpontja O_1, O_2, O_3; k_2 és k_3, k_3 és k_1, k_1 és k_2 érintési pontja rendre A, B, C, az AC és BC egyenesek a k_3 kört a D és E pontban metszik. (Ábra a köv. oldalon.)



I. megoldás: Vizsgáljunk kívülről érintkező köröket. Legyenek az $O_1O_2O_3$ háromszög szögei rendre α, β és γ. $AO_2C\Delta$ és $AO_3D\Delta$ egyenlőszárú és A-nál lévő szögeik egyenlők, mert csúcsszögek. Ha két egyenlőszárú háromszögben az alapnál fekvő egy-egy szög egyenlő, akkor az összes szögek egyenlők. Így $AO_3D\sphericalangle = AO_2C\sphericalangle = \beta$. Ugyanúgy következik a BO_1C és BO_3E egyenlőszárú háromszögekből, hogy $BO_3E\sphericalangle = \alpha$. Így a $DO_3E\sphericalangle$ egy α, egy β és egy γ nagyságú szögből tevődik össze, tehát 180°-os, vagyis a D, O_3 és E pont egy egyenesen, a k_3 kör egy átmérőjén fekszik.

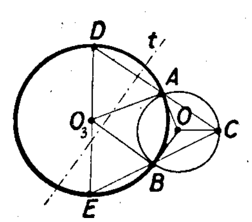
Ha a k_3 kör tartalmazza k_1-et és k_2-t, akkor a megoldásban szereplő háromszögpároknak az A ill. B csúcsnál fekvő szögei közösek és az O_1-nél O_2-nél illetve O_3-nál fekvő külső szögek egyenlőségét használva fel okoskodhatunk az előbbi módon. Ha k_3 a k_1 kör belsejében és a k_2 körön kívül van, akkor az első háromszögpárral az első esetnél, a másodikkal pedig a második esetnél elmondott módon okoskodunk és ismét arra az eredményre jutunk, hogy a DO_3 és EO_3 szárak között egy háromszög három szöge, vagyis éppen 180° fekszik.

II. megoldás: Legyen k_1 és k_2 a k_3 kör belsejében. Elég megmutatnunk, hogy $DO_3 \| EO_3$, mert a két egyenes egy pontja közös, tehát ez esetben egymás meghosszabbításába kell esniök.

Ismét nézzük az AO_2C és AO_3D egyenlőszárú háromszögeket. A-nál levő szögük közös, tehát az alapon fekvő másik szögek is egyenlők: $ACO_2\sphericalangle = ADO_3\sphericalangle$. E szögek egy szára közös, s így megfelelő szögek, másik száruk is párhuzamos: $CO_2 \| DO_3$. Ugyanígy kapjuk, hogy $CO_1 \| EO_3$. De O_1, C és O_2 egy egyenesen vannak, a két érintkező kör centrálisán, így DO_3 és EO_3 egymással is párhuzamosak, amiből következik a bizonyítandó állítás.

Ha kívülről érintkező köröket vizsgálunk, akkor a háromszögpároknak egy-egy szöge csúcsszöget alkot, az alapjukon levő második szögek ez esetben váltószögek lesznek, tehát száraik ismét párhuzamosak. A harmadik esetben ismét az egyik háromszög párra úgy okoskodunk, mint az első, a másodikra úgy, mint a második esetben.

III. megoldás: Átfogalmazzuk a feladatot. Jelöljük O-val a három kör hatványpontját. (A közös érintők közös metszéspontját). Az O-ból a körökhöz húzott érintődarabok egyenlők $OA = OB = OC$. Így O köré olyan k kört lehet írni, mely átmegy az A, B, C pontokon, és merőlegesen metszi mindhárom kört, mivel az érintő merőleges a sugárra. A feladat tehát helyettesíthető a következővel: az egymást merőlegesen metsző k és k_3 körök A és B metszéspontját a k kör tetszőleges C pontjából vetítjük. Bizonyítandó, hogy az AC és BC egyenesek második metszéspontja k_3-mal, D és E átellenes pontok. Azt fogjuk megmutatni, hogy DO_3 és EO_3 ugyanarra az egyenesre merőleges. Ilyen egyenes CO. Tükrözzük ugyanis az ábrát egy CD-re merőleges t tengely körül.



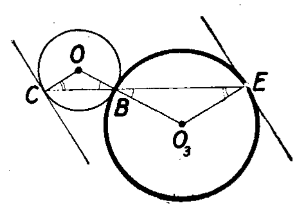
Ha egy kört egy húrjának felezőmerőlegesére tükrözünk, akkor a húr végpontjához húzott sugarak egymásba mennek át. Ha nem a felezőpontban húzzuk a merőleges tengelyt, ezek az egyenesek akkor is egymással párhuzamos helyzetekbe mennek át. Így a k kört nézve CO tükörképe t-re párhuzamos lesz OA-val. k_3-at nézve O_3D képe párhuzamos lesz O_3A-val. De a két kör merőlegesen metszi egymást, ami azt jelenti, hogy a metszésponthoz húzott körsugarak merőlegesek egymásra: $OA \perp O_3A$. Ekkor azonban $OC \perp O_3D$ -re, mert a tükörképeik is merőlegesek egymásra. Ugyanígy következik egy CE egyenesre merőleges tengelyre tükrözve, hogy $OC \perp O_3E$. Mivel az O_3D és O_2E egyenesek ugyanarra az egyenesre merőlegesek, így párhuzamosak egymással és miután az O_3 pontjuk közös, következik, hogy D, O_3 és E egy egyenesen feküsznek, k_3 egy átmérőjén.

Ennél az átfogalmazásnál a kezdetben említett három eset abban különbözik, hogy C a k kör különböző részeire esik, a bizonyítás azonban ettől függetlenül minden esetben érvényes.

A feladat átfogalmazása egy általánosítást is kínál, melyet a 299. feladatban tűzünk ki (40 old.).

IV. megoldás. A bizonyítandó állítás következik abból is, hogy ha megmutatjuk, hogy a D-ben és E-ben húzott érintők párhuzamosak.

Nézzünk először két kört, k és k_3 érintik egymást a B pontban. Középpontjuk legyen O és O_3. Egy B-n átmenő egyenes k-t C-ben, k_3-at E-ben metszi $OBC\sphericalangle = O_3BE\sphericalangle$. (Belülről érintkező köröknél egybeesik a két szög, külső érintkezésnél csúcsszögek).



Mivel $BOC\Delta$ és $BO_3E\Delta$ egyenlőszárú, következik, hogy $OCB\sphericalangle = O_3EB\sphericalangle$. B, C és E egy egyenesbe esnek, így következik, hogy $OC \| O_3E$. (Belső érintkezésnél megfelelő szögek szárai, külső érintkezésnél váltószögekéi.) De ekkor a C-ben és E-ben húzott érintők, melyek ezekre a sugarakra merőlegesek, szintén párhuzámosak. Ezt a meggondolást a k_2 és k_3 körökre alkalmazva ugyanúgy következik, hogy a C-ben és D-ben húzott érintők is párhuzamosak.

Még rövidebben mondhattuk volna el a bizonyítást, ha hivatkoztunk volna arra, hogy érintkező köröknek hasonlósági pontja az érintkezési pont, s azokban a pontokban, melyek ennél a hasonlóságnál egymásnak felelnek meg, az érintők párhuzamosak (Az előzőkben ennek az állításnak egy bizonyítását mondtuk el.) Hasonló tétel igaz térben is; érintkező gömbökre, érintők helyett érintő síkokkal, és felhasználható a feladat térbeli megfelelőjének bizonyítására, melyet a 305. feladatban tűzünk ki (41. old.).