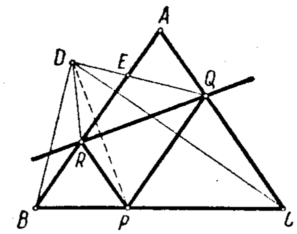
E feladatnak több megoldását adjuk, majd a feladat általánosításával is foglalkozunk.

I. megoldás. Az egyenlőszárú háromszög csúcsát A-val, másik két szögpontját B-vel és C-vel jelöljük. A Q pont az AC száron, az R pont az AB száron van. A P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképét D jelöli.



Az A, B, C, D pontok egy körön vannak, ha

$$ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle.$$

Feladatunk megoldása ennek az egyenlőségnek igazolását jelenti. A szerkesztésből következik, hogy a QPC_Δ és RBP_Δ hasonló az ABC_Δ-höz. Tehát ezek is egyenlőszárúak, azaz $QC = QP$ és $RB = RP$. A tükrözés következménye, hogy $QP = QD$ és $RP = RD$. Eredményeinket összevetve $QC = QD$ és $RB = RD$, azaz a QCD_Δ és RBD_Δ egyenlőszárú. E két háromszög alapjánál fekvő szögek egyenlőségének bizonyítását tűztük ki éppen célunkul. Egyenlőszárú háromszögek alapjánál fekvő szögei egyenlők, ha csúcsuknál lévő szögeik egyenlők. A QCD_Δ és RBD_Δ csúcsánál fekvő szöge egyenlő, ha mellékszögeik egyenlők:

$$AQD\sphericalangle = ARD\sphericalangle.$$

E szögegyenlőséget kell tehát bizonyítanunk. Ezek a szögek az AQE_Δ-ben és a DRE_Δ-ben szerepelnek. E háromszögeknek E-nél lévő szögei csúcsszögek s így egyenlők. A bizonyítandó egyenlőség tehát igaz, ha a háromszögek harmadik szögei egyenlők:

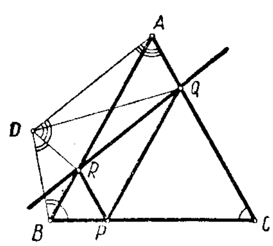
$$QAR\sphericalangle = QDR\sphericalangle.$$

E két szög viszont egyenlő, mert mindkettő egyenlő a $QPR\sphericalangle$-gel: az egyik tükörképe, a másik az $AQPR$ parallelogrammában vele szemközti szög.

II. megoldás. Ki kell mutatnunk, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Ehhez viszont elég azt belátni, hogy e négyszög szemközti szögeinek összege egyenlő, ábránk esetében:

$$A\sphericalangle + B\sphericalangle = C\sphericalangle + D\sphericalangle.$$

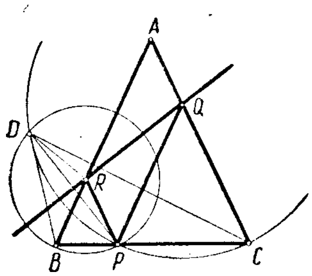
Ugyanis e négy szög összege 360° és így – ha az állított egyenlőség fennáll – az $ABCD$ négyszög szemközti szögeinek összege 180°, tehát e négyszög húrnégyszög.



Az egyenlőszárú ABC_Δ alapjánál fekvő szögei, ábránk egyíves szögei egyenlők. Az első megoldásból tudjuk, hogy az RBD_Δ egyenlőszárú s így az ennek alapjánál fekvő szögek, ábránk kétíves szögei is egyenlők. Az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz ugyanis átlói egyenlők: $AR = QD$ (mindkettő egyenlő a QP távolsággal, egyrészt az $AQPR$ paralelogramma szemközti oldalaiként, másrészt a tükrözés folytán), és két szemközti oldala egyenlő (az előbbi indokolás szerint mindkettő egyenlő az RP távolsággal). Az $AQRD$ szimmetrikus trapéz egyik párhuzamos oldalánál fekvő szögei, ábránk három íves szögei tehát egyenlők.

Az állított szögegyenlőség mindkét oldala egy-egy egyíves, kétíves és háromíves szög összege. Ezért ez az egyenlőség valóban fennáll.

III. megoldás. Az első megoldásnál már beláttuk, hogy $QC = QP = QD$ és $RB = RP = RD$. Tehát a C, P, D pontokon áthaladó kör középpontja Q, a B, P, D pontokon áthaladó kör középpontja pedig R.



E körökre alkalmazzuk a kerületi és ugyanazon íven nyugvó középponti szögek tételét. E tétel szerint:

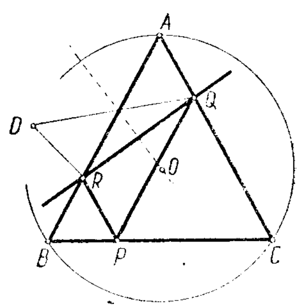
$$CDP\sphericalangle = \frac{1}{2} CQP\sphericalangle,$$
$$PDB\sphericalangle = \frac{1}{2} PRB\sphericalangle.$$

A jobboldalakon szereplő szögek s a $CAB\sphericalangle$-egyenlők, mert száraik párhuzamosak és egyirányúak. A baloldali szögek összege $CDB\sphericalangle$. Egyenleteink összeadásából tehát

$$CDB\sphericalangle = CAB\sphericalangle$$

adódik s így A és D ugyanazon a B és C ponton áthaladó köríven van.

IV. megoldás. A második megoldásnál már beláttuk, hogy az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz. Tehát a D pont az A pontnak tükörképe a QR távolság felező merőlegesére vonatkozólag.

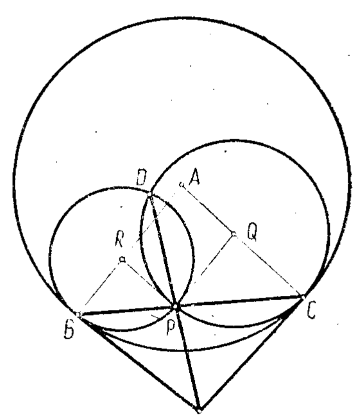


A kör kerületének egy pontját egy egyenesre tükrözve újból a kör kerületén lévő pontot kapunk, ha az egyenes áthalad a kör középpontján. Tehát azt kell belátnunk, hogy QR felezőmerőlegese áthalad az $ABC_\triangle$ köré írt kör középpontján.

Két pont távolságának felező merőlegese akkor halad át egy kör középpontján, ha a két pont a kör középpontjától egyenlő távolságra van. Azt kell tehát igazolnunk, hogy Q és R az $ABC_\triangle$ köré írt kör O középpontjától egyenlő távolságra van.

Az $ABC_\triangle$ köré írt körben, a kör középpontja körül elforgatjuk a BA húrt, amíg a (vele egyenlő hosszú) AC húrt nem fedi. E forgatás az R pontot a Q pontba viszi, hiszen $BR = AQ$, mert a szerkesztés folytán mindkettő egyenlő a PR távolsággal. A kör középpontja körül való forgatással egymásba átvihető pontok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak. Tehát Q és R valóban egyenlő távolságra van az $ABC_\triangle$ köré írt kör középpontjától.

V. megoldás. Rajzoljuk meg a harmadik megoldásban már szerepelt Q középpontú kört a C, P, D pontokon át s az R középpontú kört a B, P, D pontokon át.



E körök C, ill. B pontban szerkesztett érintői merőlegesek az AC, ill. AB szárra. Tehát ezek az érintők egymást az $ABC_\triangle$ tükörtengelyén lévő M pontban metszik és így $MB = MC$. Az M pontnak hatványa a szereplő két körre vonatkozólag MB, ill. MC négyzete. Ezek egyenlősége folytán M rajt van a két kör hatványvonalán. Ez a hatványvonal áthalad a körök metszéspontjain: a P ponton s ennek a körök középpontjait összekötő QR egyenesre vonatkozó tükörképén, a D ponton. Tehát M, P, D egy egyenesen helyezkednek el és a hatvány értelmezése szerint:

$$\overline{MP}\cdot\overline{MD}=\overline{MB^2}=\overline{MC^2}.$$

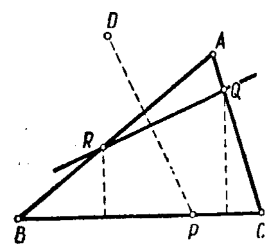
Az előző számunkban a körsorokról írott második cikkben szerepelt az inverzió fogalma. E fogalom felhasználásával megállapításunkat úgy is szövegezhetjük, hogy a D pont a P pontnak az M körül $MB=MC$ sugárral írt körre vonatkozó inverze. Minthogy P a BC egyenesen van, a D pont ennek az egyenesnek inverzén van rajt. Az idézett cikkből tudjuk, hogy egy egyenes inverze egy az inverzió pólusán áthaladó kör. Mivel a B és C pont önmagának inverze, a BC egyenes inverze az M, B, C pontokon áthaladó kör. Egy kör közös végpontú húrjainak másik végpontjában emelt merőlegesek a körön metszik egymást. Ezért az M, B, C pontokon áthaladó kör áthalad az MB és MC húrok végpontjaiban emelt merőlegesek A metszéspontján. Tehát a D pont rajt van az A, B, C pontokon áthaladó körön.

Megjegyzés az V megoldáshoz. Ábránkon az A pont körül $AB=AC$ sugárral írt kört is megrajzoltuk. Ezt azért tettük, hogy a bizonyítottaknak érdekes átfogalmazását ugyanazzal az ábrával szemléltessük. Ha az ABC_Δ-et érintetlenül hagyjuk, viszont a P pont helyzetét változtatjuk, akkor a korábban szerepelt körök s ezek P és D metszéspontjai is változtatják helyzetüket. E két kör sugarának összege az A körül írt kör sugara. A bizonyítottakat így a következőképpen fogalmazhatjuk:

Egy körbe két, belülről érintő kört írunk, melyek sugarának összege az első kör sugara. A beírt köröket érintési pontjuk változatlanul hagyása mellett változtatjuk: az egyik sugarát növeljük, a másikét ugyanannyival csökkentjük. E változtatás közben a két kör metszéspontjai közül az egyik az érintési pontokat összekötő szakaszon, a másik az érintési pontokon s az első kör középpontján áthaladó körön mozog.

Általánosítás. Ha a feladat állítását egyenlőszárú háromszög helyett általános háromszögre mondanók ki, helytelent állítanánk. Másként kell a feladatot megszövegezni, hogy tartalma általános háromszögre is helyes legyen. Ilyen átfogalmazás a következő:

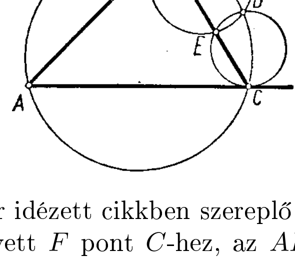
Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük a Ppontot. A PC szakasz felezőmerőlegese az AC oldalt Q pontban, a PB szakasz felezőmerőlegese az AB oldalt R pontban metszi. A P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképe az ABC háromszög köré írt körön van.



Az olvasó azonnal megállapíthatja, hogy egyenlőszárú háromszög esetében ez az általánosítás a versenyfeladat állítását adja. Érdekes megvizsgálni, hogy a versenyfeladatra adott bizonyításaink közül melyek használhatók fel az általánosítás bizonyítására is. Ennek eldöntését feladatként az olvasóra bízzuk **(194. feladat).**

Külön ki akarjuk emelni az ötödik megoldás átírásánál mutatkozó nehézséget. Ezt az átírást a következő feladat megoldása teszi lehetővé:

195. feladat. Az ABC háromszög BC oldalán E pontot veszünk fel. Megszerkesztjük az ABC háromszög köré írt kört, valamint az E ponton áthaladó s az AB egyenest B pontban, ill. az AC egyenest C pontban érintő kört. Bizonyítandó, hogy e három kör egy közös ponton halad át.



Megemlítjük, hogy e feladat állítása a már idézett cikkben szereplő Miquel-tétel határeseteként is felfogható. Ha ugyanis az ABC háromszög AC oldalán felvett F pont C-hez, az AB oldalon felvett G pont B-hez közeledik s a BC oldalon felvett E pont helyben marad, akkor az AFG kör az ABC_Δ köré írt körré válik, a BEG és CEF körök pedig éppen a feladatunkban leírt helyzethez közelednek. E három kör, Miquel-tételének az idézett cikkben kiemelt speciális esete értelmében, egy ponton halad át. Ez áll a mondott határhelyzetre is. Éppen ennek határátmenet nélkül való bizonyítását bíztuk olvasóinkra.

196. feladat. A 195. feladat megoldásának birtokában már könnyű az ötödik megoldás bizonyítását az általánosítás bizonyításává átírni. Ennek kidolgozását is olvasóinkra bízzuk.

Leszögezzük, hogy e feladat megoldásával az eredeti versenyfeladatnak a közölt öthöz csatlakozó újabb megoldása adódik.