A továbbiakban $x \mod y$ jelöli x osztási maradékát y-nal osztva.

A megoldáshoz két ismert lemmát használunk fel:

a) *Tetszőleges n, k pozitív egészekre és p prímszámra $\binom{n}{k}$ akkor és csak akkor osztható p-vel, ha valamilyen pozitív egész α-ra $n \mod p^\alpha < k \mod p^\alpha$.*

b) *Ha p prím és $p^\alpha \mid \binom{n}{k}$, akkor $p^\alpha \le n$.*

Mivel az $a \mod p > b \mod p$ állítás ekvivalens azzal, hogy $(b-a) \mod p > b \mod p$, elég az $a \le \frac{b}{2}$ esetre megoldani a feladatot.

Az a) lemma szerint, ha egy p prímszám osztója $\binom{b}{a}$-nak, akkor valamilyen α ra $b \mod p^\alpha < a \mod p^\alpha$. Ha $p > a$, akkor $\alpha = 1$ esetén is teljesül a feltétel, mert

$$a \mod p = a = a \mod p^\alpha > b \mod p^\alpha \ge b \mod p.$$

Ha pedig $p > \sqrt{b}$, akkor csak $\alpha = 1$ lehetséges. A feladat állításához ezért elég a következőt igazolni:

A $\binom{b}{a}$ számnak létezik olyan p prímosztója, amelyre $p > \min\left(a, \left[\sqrt{b}\right]\right)$.

Legyen $a_0 = \min\left(a, \left[\sqrt{b}\right]\right)$. Ha $a_0 = 1$, akkor az állítás triviális. Feltehetjük tehát, hogy $a_0 \ge 2$. Legyenek az a_0-nál nem nagyobb prímek $p_1, \ldots, p_s$, ezek kitevője $\binom{b}{a}$-ban $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. A b) lemma szerint $p_i^{\alpha_i} \le b$, és ha $\binom{b}{a}$-nak nincs más prímosztója, akkor

$$\binom{b}{a_0} \le \binom{b}{a} = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{\alpha_s} \le b^s. \tag{1}$$

Másrészt

$$\binom{b}{a_0} = \frac{b}{a_0} \cdot \frac{b-1}{a_0-1} \cdot \cdots \cdot \frac{b-a_0+1}{1} > \left(\frac{b}{a_0}\right)^{a_0} \ge b^{\frac{a_0}{2}},$$

következésképp $s > \frac{a_0}{2}$. Mivel s az a_0-nál nem nagyobb prímszámok száma, ez azt jelenti, hogy $a_0 = 3$, $a_0 = 5$ vagy $a_0 = 7$.

Ha $a_0 = 3$, akkor $s = 2$, és (1) alapján $\binom{b}{3} \le b^2$, vagyis $b \le 8$; ha $a_0 = 5$, akkor $s = 3$, (1) alapján $\binom{b}{5} \le b^3$, azaz $b \le 15$; ha pedig $a_0 = 7$, akkor $s = 4$, $\binom{b}{7} \le b^4$, azaz $b \le 23$. Mindhárom eset ellentmond az $a_0 \le \sqrt{b}$ feltételnek.

Megjegyzések. 1. A két idézett lemma az úgynevezett Legendre-formula segítségével bizonyítható be. Eszerint a p prímszám kitevője $n!$ prímtényezős felbontásában

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots,$$

ennek következménye, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatóban p kitevője

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{p^\nu}\right] - \left[\frac{k}{p^\nu}\right] - \left[\frac{n-k}{p^\nu}\right]\right).$$

Ebben az összegben minden egyes tag 0 vagy 1; a ν-edik tag akkor és csak akkor 1, ha $n \mod p^\nu < k \mod p^\nu$. Ebből az a) és a b) állítás is következik.

2. Több versenyző hivatkozott a Sylvester–Schur-tételre, ami azt állítja, hogy $k \le \frac{n}{2}$ esetén $\binom{n}{k}$-nak létezik k-nál nagyobb prímosztója. (A tétel, bizonyítás nélkül, megtalálható pl. Erdős–Surányi: *Válogatott fejezetek a számelméletből* c. könyvének 195. oldalán.) A megoldás módszerével a Sylvester–Schur-tételnek egy valamivel gyengébb változata könnyen igazolható: Létezik olyan pozitív c konstans, amelyre tetszőleges $k \le cn$ esetén $\binom{n}{k}$-nak van k-nál nagyobb prímosztója.