

a) Legyen  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Megmutatjuk, hogy ha  $s_n$  páros, illetve páratlan, akkor minden, a  $[-s_n; s_n]$  intervallumbeli páros, illetve páratlan szám előáll  $\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$  alakban. Ebből a feladat első része azonnal következik, mert vagy minden páros szám, vagy minden páratlan egész szám előáll néhány  $a_n$  előjeles összegeként.

Állításunk igaz  $n = 1$  esetén, mert a feltételek miatt  $s_1 = a_1 = 1$ . Tegyük fel, hogy igaz  $n = k$ -ra; bebizonyítjuk  $n = k + 1$  esetén is. Az indukciós feltevés alapján  $(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{k-1}) - a_k$  alakban előáll az összes  $[-s_{k-1} - a_k; s_{k-1} - a_k]$ -beli,  $(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{k-1}) + a_k$  alakban pedig az összes  $[-s_{k-1} + a_k; s_{k-1} + a_k]$ -beli, megfelelő paritású szám. De  $s_{k-1} + a_k = s_k$ ,  $s_{k-1} - a_k \geq (k-1) \cdot 1 - k = -1$  miatt ez a két intervallum a 0 kivételével biztosan tartalmazza az összes  $-s_k$  és  $s_k$  közötti egész számot. Ha a 0 nem szerepel az intervallumokban, az csak úgy lehet, ha  $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 1$  és  $a_k = k$ , akkor viszont  $s_k = 2k - 1$  páratlan, tehát a 0-t nem is kell előállítanunk.

b) Elég egy ellenpéldát mutatnunk. Legyen  $a_n = 100n$ , ha  $n$  10-hatvány, ellenkező esetben legyen  $a_n = 1$ . Erre a sorozatra  $\frac{a_n}{n} \leq 100$ .

Ha  $10^k \leq n < 10^{k+1}$ , akkor tetszőleges előjelek esetén

$$\begin{aligned} || \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n | - 100 \cdot 10^k | &\leq (a_1 + a_2 + \dots + a_{10^k-1}) + (a_{10^k+1} + \dots + a_n) = \\ &= 100 \cdot (10^0 + 10^1 + \dots + 10^{k-1}) + n - k - 1 < 100 \frac{10^k - 1}{9} + 10^{k+1} < 22 \cdot 10^k. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy  $| \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n |$  csak az  $I_k = (78 \cdot 10^k; 122 \cdot 10^k)$  intervallumban lehet.

Ezek az intervallumok diszjunktak, mert

$$78 \cdot 10^{k+1} - 122 \cdot 10^k = 658 \cdot 10^k,$$

sőt az intervallumok közötti hézagok mérete minden határon túl nő. Ezért tetszőleges számtani sorozatnak van olyan eleme, amelyet egyik intervallum sem tartalmaz.

*Megjegyzés.* Akik csak a feladat első felét oldották meg, 2 pontot kaptak.