

A lehetséges összegek  $(0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$  száma  $2n + 1$ . Ezek közül  $2n$  szerepel a sor- és oszlopösszegek között, tehát pontosan egy nem szerepel. Legyen a hiányzó összeg  $h$ . Az egyszerűség kedvéért szükség esetén soroljuk a 0-t a pozitív, illetve a negatív összegek közé úgy, hogy a táblázatban fellépő pozitív és negatív összegek száma egyaránt  $n$  legyen.

Legyen a pozitív oszlopösszegek száma  $k$ ; ekkor a negatív oszlopösszegek száma  $n - k$ , a negatív sorösszegek száma  $k$ , és a pozitív oszlopösszegek száma  $n - k$ .

Definiáljuk az  $S$  összeget a következőképpen: adjuk össze a táblázat pozitív összegű oszlopaiban álló elemeket, adjuk hozzá a pozitív összegű sorok elemeit, vonjuk ki a negatív összegű oszlopok elemeit, majd a negatív összegű sorok elemeit. Ezzel valójában a sor- és oszlopösszegek abszolútértékét adtuk össze, tehát  $S = 2(1 + 2 + \dots + n) - |h|$ .

Az  $S$  definíciójában kétszer számoltuk azokat az elemeket, amelyek pozitív összegű sorban és oszlopban szerepelnek (ez összesen  $k(n - k)$  elem), kétszer vontuk ki azokat, amelyek negatív összegű sorokban és oszlopokban szerepelnek (szintén  $k(n - k)$  elem), a többi elemet egyszer hozzáadtuk, egyszer kivontuk. Emiatt  $S \leq 4k(n - k)$ , és

$$4k(n - k) \geq S = 2(1 + 2 + \dots + n) - |h| \geq n(n + 1) - n = n^2,$$

a jobb oldalra rendezve  $0 \geq (n - 2k)^2$ . Ez csak  $n = 2k$  esetén teljesülhet, tehát  $n$  nem lehet páratlan.

*Megjegyzés.* Páros  $n$ -re a táblázat mindig kitölthető a feltételnek megfelelően, például az *ábra* szerint.

0	+1	+1	...	+1	+1	+1	+1	...	+1
-1	0	+1	...	+1	+1	+1	+1	...	+1
-1	-1	0	...	+1	+1	+1	+1	...	+1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
-1	-1	-1	...	0	+1	+1	+1	...	+1
-1	-1	-1	...	-1	+1	+1	+1	...	+1
-1	-1	-1	...	-1	+1	+1	+1	...	+1
-1	-1	-1	...	-1	-1	-1	+1	...	+1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
-1	-1	-1	...	-1	-1	-1	-1	...	+1