

**I. megoldás.** Az egymáshoz valamelyik lapsíkjukon illeszkedő kis téglatesteken lépegetve igazolható, hogy a kis téglatestek mindegyik lapsíkja párhuzamos a nagy téglatest valamelyik lapjával, amiből következik, hogy azonos helyzetűek.

Vegyünk fel a lapokkal párhuzamosan, egymástól pontosan  $\frac{1}{2}$  távolságra párhuzamos síkokat úgy, hogy szerepeljen ezek között a nagy téglatestnek három, egymásra merőleges lapsíkja is. A síkok a teret  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  méretű kockákra osztják fel. A kockákat színezzük ki fehérre és feketére úgy, hogy a szomszédosak különböző színűek legyenek. A feladat állítása a következő két segedtételből triviálisan következik:

a) *Ha egy téglatestnek van egész hosszúságú éle, akkor az általa tartalmazott fekete, illetve fehér térrészek térfogata megegyezik.*

b) *Ha a nagy téglatest által tartalmazott fehér és fekete térrészek térfogata megegyezik, akkor van egész hosszúságú éle.*

Az a) állítás triviális.

Legyen a nagy téglatest élének hossza  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a fehér és fekete részek térfogatának különbsége  $\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|$ , ahol  $\|x\|$  az  $x$  szám távolsága a legközelebbi egésztől. Ha ez 0, akkor  $a$ ,  $b$ ,  $c$  valamelyike egész.

**II. megoldás.** A téglatest felbontásához egy gráfot rendelünk.

Legyenek a gráf csúcsai azok a pontok a térben, amelyek csúcsai legalább egy téglatestnek. Minden egyes kis téglatesten tekintsünk négy párhuzamos, egész hosszúságú élt; ezek legyenek a gráfnak is élei. (Ha egy kis téglatestnek több egész hosszúságú éle is van, akkor is csak az egyik élnégyesből készítsünk éleket.) A gráfnak lehetnek többszörös élei; két csúcsot pontosan annyi él köt össze, ahány téglatest egész hosszúságú élének végpontjai.

Minden pont annyiadfokú, ahány kis téglatestnek csúcsa. Emiatt a nagy téglatest csúcsai elsőfokúak. Azt állítjuk, hogy a többi csúcs fokszáma páros. Tekintsünk egy pontot, amely nem csúcsa a nagy téglatestnek. Fekessünk a ponton keresztül a téglatestek lapjaival párhuzamos síkokat. Ezek a teret nyolc részre osztják. Egy olyan téglatest, amelynek az illető pont csúcsa, 1 tényolcadot foglal el, ha pedig a pont egy téglatest belsejébe, lapjának belsejébe vagy élének belsejébe esik, akkor 8, 4, illetve 2, de mindenképpen páros számú térrészt. Mivel a pont maga is a nagy téglatest belsejébe, lapjának belsejébe vagy élének belsejébe esik, a kis téglatesteknek szintén páros számú térrészt kell elfoglalniuk. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha az 1 térrészt elfoglaló kis téglatestek száma páros.

Tekintsük a gráfnak egy olyan összefüggő komponensét, amely tartalmazza a nagy téglatest egyik csúcsát. Ebben a fokszámok összege páros (az élek számának kétszerese), és tartalmaz páratlan fokú csúcsot: a nagy téglatest egyik csúcsát. Ekkor viszont még legalább egy páratlan fokú csúcsot kell tartalmaznia, ami csak a nagy téglatest egy másik csúcsa lehet. Létezik tehát a gráfban olyan út, amely összeköti a nagy téglatest két csúcsát.

Tekintsük a nagy téglatestnek két olyan különböző lapsíkját, amelyek a két, úttal összekötött csúcsot tartalmazzák. Az úton végighaladva, a síkokra merőlegesen minden lépésnél egész hosszúságút lépünk, ezért a két sík távolsága egész szám.

*Megjegyzés.* A témával kimerítően foglalkozik Stan Wagon *Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle* c. cikke (American Math. Monthly, Vol. 94 (1987) No. 7. 601–617. old.).