I. megoldás. Definiáljuk a következő függvénysorozatot:

$$f_0(x)=\frac{1}{x};\quad f_{m+1}(x)=f_m(x)-f_m(x+1). \tag{1}$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$f_m(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}}{x+k}=\frac{m!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)}. \tag{1}$$

Ebből az állítás következik, mert $m=2n$ esetén a bal oldalon (1) bal és jobb oldalának különbsége, a jobb oldalon pedig egy pozitív szám áll.

Ha $m=0$, akkor állításunk triviális. Másrészt (2) öröklődik m-ről $(m+1)$-re:

$$\begin{gathered}f_{m+1}(x)=f_m(x)-f_m(x+1)=\\ =\left(\frac{\binom{m}{0}}{x}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}}{x+k}\right)-\left(\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{\binom{m}{k-1}}{x+k}+(-1)^m\frac{\binom{m}{m}}{x+m+1}\right)=\\ =\frac{\binom{m+1}{0}}{x}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}}{x+k}+(-1)^{m+1}\frac{\binom{m+1}{m+1}}{x+m+1}=\sum_{m=0}^{m+1}(-1)^k\frac{\binom{m+1}{k}}{x+k},\end{gathered}$$

illetve

$$\begin{gathered}f_{m+1}(x)=f_m(x)-f_m(x+1)=\\ =\frac{m!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)}-\frac{m!}{(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)}=\\ =\frac{m!((x+m+1)-x)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)}=\frac{(m+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)}.\end{gathered}$$

Megjegyzés. Tetszőleges f függvényre és páronként különböző $x_0,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ pontokra az

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\dots\\ \dots+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

kifejezést *az f függvénynek az adott pontokhoz tartozó osztott differenciájának nevezik,* és $[x_0,\ x_1,\ \dots,x_n]f$-fel jelölik. Ismeretes, hogy ha f n-szer differenciálható, akkor létezik olyan ξ szám, amely az $x_0,\dots,x_n$ számok legkisebbike és legnagyobbika közé esik, továbbá $[x_0,\ \dots,x_n]f=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. (Ennek a tételnek speciális esete a Lagrange-középértéktétel.) Ha $f(x)=\dfrac{1}{x}$ és $x_k=x+k$, akkor a tétel szerint létezik olyan $x<\xi<x+2n$ szám, amelyre (1) bal és jobb oldalának különbsége éppen $f^{(2n)}(\xi)=\dfrac{(2n)!}{\xi^{2n+1}}$.

II. megoldás. Mivel tetszőleges $\alpha>0$ esetén $\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\alpha}$, (1) bal és jobb oldalának különbsége:

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{\binom{2n}{k}}{x+k}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\int\limits_0^1 t^{x+k-1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 t^{x-1}\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}t^k\right)\mathrm{d}t==\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-x)^{2n}\mathrm{d}t>0.$$

Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. A $B(x,\ y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ függvény neve *Euler-féle béta-függvény*. Ez az integrál tetszőleges pozitív x, y-ra létezik. Ha x és y pozitív egészek, akkor $B(x,\ y)=\dfrac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$. Ez lehetőséget ad többek között a binomiális együtthatók definíciójának olyan kiterjesztésére, amikor az argumentumok nem egészek, például definiálható akár $\dbinom{\pi}{\sqrt{2}}$ is.