Egy háromszögben a legnagyobb oldalhoz tartozik a legkisebb magasság. Mivel minden a valós szám esetén igaz, hogy $4a^2+3>a^2+a+1$ és $4a^2+3>a^2-a+1$, azért a feladatban szereplő háromszög legnagyobb oldala $\sqrt{4a^2+3}$. Megmutatjuk, hogy az ehhez tartozó magasság, amit jelöljünk k-val, legfeljebb $\frac{1}{2}$.

Egy háromszög leghosszabb oldalán lévő szögek mindig hegyesszögek, ezért a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság talppontja mindig az oldal belső pontja. Legyen x_1 és x_2 az a két szakasz, amelyre a talppont osztja ezt az oldalt.

Ekkor
$$x_1 + x_2 = \sqrt{4a^2+3},$$
továbbá a keletkező két derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint
$$x_1^2 + k^2 = a^2 - a + 1, x_2^2 + k^2 = a^2 + a + 1.$$
Ezekből kapjuk, hogy
$$2k^2 = 2a^2 + 2 - (x_1^2 + x_2^2).$$
De
$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{4a^2+3}\right)^2 + \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1+x_2}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(4a^2+3+\left(\frac{2a}{\sqrt{4a^2+3}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(4a^2+3+\frac{4a^2}{4a^2+3}\right),$$
ezért
$$2k^2 = 2a^2 + 2 - \left(2a^2 + \frac{3}{2} + \frac{2a^2}{4a^2+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2a^2}{4a^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

Ebből pedig következik a bizonyítandó $k \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség. Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = 0$; ekkor a háromszög oldalai 1, 1 és $\sqrt{3}$.

Terpai Tamás, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Egyszerű számolással belátható, hogy minden valós a esetén $\sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{a^2+a+1} > \sqrt{4a^2+3}$, azaz a két rövidebb oldal összhossza nagyobb, mint a harmadik oldal, tehát mindig létezik a feladatban szereplő háromszög.