

Jelöljük a négyszög csúcsait  $A, B, C, D$ -vel, oldalainak felezőpontjait  $X, Y, V, Z$ -vel, az átlók felezőpontjait  $S$ -sel és  $T$ -vel, az  $S$ -en és  $T$ -n át a másik átlóval húzott párhuzamosok metszéspontját pedig  $P$ -vel. Az  $XYVZ$  négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalainak hossza egyenlő ( $XY = VZ = \frac{BD}{2}$  és  $XZ = YV = \frac{AC}{2}$ ), ugyanis oldalai az  $ABD, CBD, DAC$  és  $BAC$  háromszögek  $BD$ , illetve  $AC$  oldalához tartozó középvonalai. Az  $ABCD$  négyszög konvexitása miatt  $XYVZ$  az  $ABCD$  belsejében van,  $T, S$  és  $P$  pedig az  $XYVZ$  paralelogramma belső pontjai.

Mivel  $PS \parallel AC \parallel XZ \parallel YV$ , azért  $T_{PYV} = T_{SYV}$  és  $T_{PXZ} = T_{SXZ}$ , és így  $T_{PYBV} = T_{SYBV}$ , valamint  $T_{PXDZ} = T_{SXDZ}$ . Viszont  $S$  a  $BD$  átló felezőpontja, ezért az  $SYBV$  és az  $SXDZ$  konvex négyszögek két-két átlójának hossza megegyezik, és  $XZ \parallel YV$  miatt az átlók által bezárt szög is egyenlő. Ebből viszont következik, hogy a két négyszög területe is egyenlő,  $T_{SYBV} = T_{SXDZ}$ . Az  $SX$  és  $SY$ , illetve az  $SV$  és  $SZ$  szakaszok az  $ABD$ , illetve a  $CBD$  háromszög

középvonalai, ezért (lásd a 2. ábrát)  $T_{AXSY} = \frac{1}{2}T_{ABD}$  és  $T_{CZSV} = \frac{1}{2}T_{CBD}$ . Tehát

$$\begin{aligned} T_{PYBV} = T_{SYBV} &= \frac{1}{2}(T_{SYBV} + T_{SXDZ}) = \frac{1}{2}(T_{ABCD} - (T_{AXSY} + T_{CZSV})) = \\ &= \frac{1}{2}\left(T_{ABCD} - \frac{1}{2}(T_{ABD} + T_{CBD})\right) = \frac{1}{2}\left(T_{ABCD} - \frac{1}{2}T_{ABCD}\right) = \frac{1}{4}T_{ABCD}. \end{aligned}$$

Az eddigiekből ugyanúgy következik, hogy  $T_{PXDZ} = \frac{1}{4}T_{ABCD}$ ; ha pedig a bizonyításban az  $S$  pont szerepét a  $T$  pont, a  $PYBV$  és a  $PXDZ$  négyszögek szerepét pedig a  $PYAX$  és a  $PZCV$  négyszögek veszik át, akkor ugyanígy belátható, hogy  $T_{PYAX} = T_{PZCV} = \frac{1}{4}T_{ABCD}$ .

Ezzel a feladat állítását beláttuk.