Legyen φ egy olyan hegyesszög, amelyre teljesül, hogy $\varphi < \frac{\pi}{1996}$, továbbá $\sin\varphi$ felírható $\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}$ alakban, ahol k egész szám. (Ilyen szög biztosan van, mert $\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}$ tetszőlegesen kicsi lehet, ha k elég nagy.) Ekkor $\cos\varphi$ is racionális, mert

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{(2k+1)^2}{(2k^2+2k+1)^2}} == \frac{\sqrt{(2k^2+2k+1)^2-(2k+1)^2}}{2k^2+2k+1} = \frac{2k(k+1)}{2k^2+2k+1}.$$

Ebből viszont a

$$\sin n\varphi = \sin\varphi\cos(n-1)\varphi + \cos\varphi\sin(1-n)\varphi$$

és a

$$\cos n\varphi = \cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \sin\varphi\sin(n-1)\varphi$$

azonosságok miatt (az n-re vonatkozó teljes indukcióval) következik, hogy $\sin n\varphi$ is és $\cos n\varphi$ is racionális minden pozitív egész n esetén.

Ennek ismeretében vegyünk fel az O középpontú, egységsugarú körön 1997 darab P_1, P_2, $\ldots$, P_{1997} pontot úgy, hogy $i = 1, 2, \ldots, 1996$-ra $P_iOP_{i+1} = +2\varphi$ legyen (a szögek irányítottak, ezért $P_i \not\equiv P_{i+1}$). Ekkor minden i és j ($1 \le i, j \le 1997$) esetén $P_iOP_j\sphericalangle = 2|i-j|\varphi$, ezért a P_iOP_j egységnyi szárú egyenlő szárú háromszög alapjának hossza $P_iP_j = 2\Big|\sin|i-j|\varphi\Big|$, tehát racionális. Mivel

$$P_1OP_{1997}\sphericalangle = \sum_{i=1}^{1996} P_iOP_{i+1}\sphericalangle = 1996 \cdot 2\varphi < 1996 \cdot \frac{2\pi}{1996} = 2\pi,$$

azért a P_i pontok mind különbözőek, és közülük bármelyik kettő távolsága racionális. Vegyük e távolságok nevezőinek legkisebb közös többszörösét, és az egész ábrát nagyítsuk O-ból ennyiszeresére. Ha a nagyításnál P_i képe $P\prime_i$, akkor a $P\prime_1$, $P\prime_2$, …, $P\prime_{1997}$ pontok közül bármelyik kettő távolsága egész, és mivel a pontok egy körön vannak, azért közülük minden egyenes legfeljebb kettőt tartalmaz. Ezzel a kért konstrukciót megadtuk.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.)

Megjegyzések. 1. A fenti konstrukció 1997 helyett nyilván tetszőleges *véges* számú pontra helyes, ha φ-t elég kicsinek választjuk.

2. A feladatnak egy trigonometriát nem használó megoldása megtalálható Reiman István: *A geometria és határterületei* című könyvének 289. oldalán. Ugyanitt található annak a bizonyítása is, hogy végtelen sok pontot viszont már nem lehet megadni a feltételeknek megfelelő módon.