

I. megoldás. Legyen a gömb sugara R , a henger alapkörének sugara r , a henger magassága h . Mivel a henger és a gömb középpontja egybeesik, a Pitagorasz-tétel alapján $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$, a felszín és a térfogat hányadosa pedig

$$\frac{A}{V} = \frac{2\pi r(h+r)}{\pi r^2 h} = \frac{2}{r} + \frac{2}{h} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Alkalmazzuk a súlyozott harmonikus és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget az $\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$ és $\sqrt{R^2 - r^2}$ számokra

a $\sqrt[3]{4}$ és 1 súlyokkal:

$$\left(\sqrt[3]{4} + 1\right) \frac{V}{A} = \frac{\sqrt[3]{4} + 1}{\sqrt[3]{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{r} + \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}} \leq \sqrt{\frac{\sqrt[4]{4} \cdot \left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \sqrt{R^2 - r^2}}{\sqrt[3]{4} + 1}} = \frac{R}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}},$$

átrendezve

$$\frac{A}{V} \geq \frac{(\sqrt[3]{4} + 1)^{\frac{3}{2}}}{R}.$$

A felszín és a térfogat hányadosát sikerült alulról becsülnünk egy, csak a gömb sugarától függő mennyiséggel. Egyenlőség akkor áll fenn, ha ugyanannak a két számnak vettük a közepeit, azaz $\frac{r}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{R^2 - r^2}$. Ebből r -et kifejezve

$$r = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}} R \quad \text{és} \quad h = 2\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}} R.$$

Ebben az esetben lesz a felszín és a térfogat hányadosa minimális, azaz $\frac{(\sqrt[3]{4} + 1)^{\frac{3}{2}}}{R}$.

II. megoldás. Legyen $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Az előző megoldás szerint ennek a függvénynek a minimumát keressük a $(0; R)$ intervallumban. Ezt a derivált előjelének vizsgálatával végezzük.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{x}{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3 - 2(R^2 - x^2)^{3/2}}{x^2(R^2 - x^2)^{3/2}}.$$

A vizsgált intervallumban az utolsó tört nevezője mindig pozitív, a számlálója szigorúan monoton nő. Értéke akkor 0, amikor $x^3 - 2(R^2 - x^2)^{3/2} = 0$, azaz $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}} R$.

A $\left(0; \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}} R\right)$ intervallumban $f' < 0$, és a függvény szigorúan monoton fogy, a $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}} R; R\right)$ intervallumban pedig $f' > 0$, és f szigorúan monoton nő. A függvény minimuma ezért az $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4} + 1}} R$ pontban van.

Megjegyzés. A feladatot deriválással megoldók között típushiba volt, hogy csupán a derivált nullhelyét keresték meg, de egyáltalán nem, vagy rosszul indokolták meg, hogy ott miért minimum van. Az sem teljes megoldás, ha valaki a második derivált előjele alapján csak annyit állapított meg, hogy az adott helyen a függvénynek *lokális* minimuma van.