A háromszög magasságpontja, súlypontja, körülírt körének középpontja rendre legyen M, S, O. Az M, F, S, O pontok a leírt sorrendben a háromszög Euler-egyenesén vannak, és mivel $MS = 2 \cdot SO$, $MF = FS = SO = \frac{1}{3} \cdot MO$.

A súlypontból a háromszög csúcsaiba mutató vektorok legyenek a, b, c, továbbá $\mathbf{v} = \overrightarrow{SO}$. Ekkor $\overrightarrow{SF} = -\mathbf{v}$, és így

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{v})^2 + (\mathbf{b}+\mathbf{v})^2 + (\mathbf{c}+\mathbf{v})^2 =$$
$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2, \quad \text{hiszen} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0.$$

Hasonlóan számítható ki $3r^2$, éspedig

$$3r^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{v})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{v})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{v})^2 =$$
$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2,$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)