I. megoldás. Mivel a és b pozitív egészek, a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt[a+b]{a^a \cdot b^b} \geq \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{2}.$$

Figyelembe véve, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, elegendő azt igazolni, hogy $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \geq m$. Ismeretes, hogy az a, b befogójú derékszögű háromszögben $m = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, így elég megmutatni, hogy $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \geq \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Rendezzük ezt a következőképpen: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab}$, ami ismert egyenlőtlenség szerint igaz. Egyenlőség pontosan akkor érvényes, ha $a=b$, hiszen a felhasznált egyenlőtlenségek mindegyikében ugyanekkor van egyenlőség.

Szalai-Dobos András (Szekszárd, Garay J. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Feltehető, hogy $a \geq b$. Ekkor

$$\frac{\sqrt[a+b]{a^a \cdot b^b}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[a+b]{a^{\frac{a+b}{2}} \cdot b^{\frac{a+b}{2}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt[a+b]{a^{\frac{a+b}{2}} \cdot b^{\frac{a+b}{2}}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}}.$$

elég tehát azt belátni, hogy $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \geq m$. Az átfogót c-vel jelölve $ab = mc$, ezért azt kell bizonyítani, hogy $\frac{\sqrt{mc}}{\sqrt{2}} \geq m$. Mindkét oldalt négyzetre emelve és m-mel osztva, a $\frac{c}{2} \geq m$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami nyilván igaz. Egyenlőség mindkét becslést tekintve pontosan akkor lesz, ha $a = b$.

Várkonyi Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)