Feltehető, hogy a P pont az A_1A_n íven van. Jelöljük a PA_1 ívhez tartozó középponti szöget α-val, így a $PA_2, \ldots,$ PA_n ívekhez tartozó középponti szögek: $\alpha+\frac{2\pi}{n}, \ldots, \alpha+\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$. Ha a kör sugara r, akkor pl. a PA_1 húr hossza $2r\sin\frac{\alpha}{2}$. A vizsgált összeget S-sel jelölve:

$$S=16r^4\left(\sin^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\cdots+\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Felhasználjuk, hogy $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, így

$$S=16r^4\left[\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1-\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)}{2}\right)^2\right]=$$

$$=16r^4\left\{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\left[\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left[\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos^2\left(\alpha+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right]\right\}.$$

Az első szögletes zárójelben lévő összeg a

$$\cos x+\cos(x+y)+\cos(x+2y)+\cdots+\cos(x+ky)=\frac{\sin\frac{(k+1)y}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{ky}{2}\right)}{\sin\frac{y}{2}}$$

azonosság szerint 0 (bizonyítását lásd pl. *Skljarszkij–Csencov–Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből (Tankönyvkiadó, 1967) I. 225.b feladatánál).

A $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ összefüggést alkalmazva:

$$S=16r^4\left\{\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\frac{1}{8}\left[\cos 2\alpha+\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(2\alpha+\frac{(n-1)4\pi}{n}\right)\right]\right\},$$

ahol a szögletes zárójelben az előbb említett azonosság szerint 0 van.

Azt nyertük, hogy $S=6n\cdot r^4$, ami valóban független P választásától.

Gerbicz Róbert (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) és *Megyeri Csaba* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzések. 1. *Páles Csaba* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn.) az egységnyi sugarú körbe írt n-oldalú szabályos sokszöget úgy helyezte el, hogy a csúcsainak megfelelő komplex számok az n-edik egységgyökök legyenek, a P ponthoz pedig a z komplex számot rendelte. Legyenek az egységgyökök $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, ekkor $S=|z-\varepsilon_1|^4+|z-\varepsilon_2|^4+\cdots+|z-\varepsilon_n|^4$, amiből némi számolással $S=6n$, illetve r sugarú kör esetén $S=6n\cdot r^4$.

2. *Megyeri Csaba* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.) megmutatta, hogy a szabályos sokszög O középpontjától d távolságra fekvő tetszőleges P pont esetén a vizsgált összeg csak a d-től függ, tehát az O középpontú, d sugarú kör bármely pontjára is állandó.