

A különböző alakú egységnyi területű háromszögek közül azokat kell megkeresnünk, amelyekbe maximális területű négyzet írható. Első lépésként megmutatjuk, hogy a maximális területű négyzet csúcsai szükségképpen a háromszög-
lemez határán lesznek. Ha a beírt négyzetnek legalább két csúcsa a háromszög belső pontja (1. ábra), akkor a három-
szögnek van olyan csúcsa, amelyikből a nézetet nagyítva egy csúcs képe a kerületre kerül. Ezt ismételve elérhetjük,
hogy három négyzetszűcs a háromszög határán legyen, miközben a négyzet területe növekszik.

A 2. ábrán a négyzet három csúcsa a háromszög oldalaira illeszkedik. Az ábra jelöléseivel $XY \parallel BC$, és feltehetjük,
hogy $PB \leq PY$ és $CR \geq RX$. A PS egyenes a BC -t D -ben, az AC -t E -ben metszi. A $PB \leq PY$ feltevés miatt
a PBD háromszög területe nem nagyobb, mint a PSY háromszögé. Ezért a CDE háromszög területe kisebb, mint
az ABC háromszögé. Ha most a CDE háromszöget – a négyzettel együtt – úgy nagyítjuk, hogy területe egységnyi
legyen, akkor a $PQRS$ négyzet területe is növekedni fog.

Az elmondottakból az látszik, hogy a maximális területű négyzet a 3. ábra szerint úgy helyezkedik el a három-
szögben, hogy egyik oldala azon a háromszög-oldalon van, amelyiknek egyik csúcsában nincs tompaszög. Az ábra
jelöléseivel az ASR és az ABC háromszögek hasonlóságából $x : d = (x + d) : BC$, amiből $BC = \frac{d(x + d)}{x}$. Így a
háromszög területe $\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{x} \cdot (x + d)^2$, amit a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel becsülve:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{x} (x + d)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{x} \cdot (2\sqrt{dx})^2 = 2d^2.$$

Ez azt jelenti, hogy $2d^2$ akkor lesz a legnagyobb, ha annyi, mint a háromszög területe, és ez akkor lép fel, ha $x = d$.
Ebben az esetben $d^2 = \frac{1}{2}$, és $BC = x + d = \sqrt{2}$. Tehát a $\sqrt{2}$ alapú és $\sqrt{2}$ magasságú nem tompaszögű egységnyi
területű háromszögekbe írható a legnagyobb négyzet.

Megjegyzés. A feladat megoldásában a beírt négyzet lefedett négyzet értelemben szerepelt. Szigorúbb értelemben
beírt négyzet a 3. ábrán látható négyzet.

