$\dfrac{n^2}{i} - \dfrac{n^2}{i+1} < 1$ ekvivalens $n^2 < (i+1)i$-vel, tehát pontosan akkor teljesül, ha $i \geq n$. A feltétel szerint

$$\left[\frac{n^2}{f(n)}\right] - \left[\frac{n^2}{f(n)+1}\right] = 0, \quad \text{így} \quad \frac{n^2}{f(n)} - \frac{n^2}{f(n)+1} < 1.$$

Ebből $f(n) \geq n_0$. Vizsgáljuk $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] + i$ értékét $n \leq i \leq f(n)$ esetén.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy ekkor $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] + i = 2n$.

Ha $i = n$, akkor $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] + i = n + n = 2n$.

Ha $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] + i = 2n$ és $n \leq i < f(n)$, úgy $\left[\dfrac{n^2}{i+1}\right] + i + 1 = 2n$ belátásához elég megmutatni, hogy $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] - \left[\dfrac{n^2}{i+1}\right] = 1$.

Mivel $i \geq n$, azért $\dfrac{n^2}{i} - \dfrac{n^2}{i+1} < 1$; így $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] - \left[\dfrac{n^2}{i+1}\right] < 2$. Másrészt $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] - \left[\dfrac{n^2}{i+1}\right] \neq 0$, ellenkező esetben ugyanis nem $f(n)$ volna a legkisebb olyan k egész, amelyre $\left[\dfrac{n^2}{k}\right] = \left[\dfrac{n^2}{k+1}\right]$. Mivel $\left[\dfrac{n^2}{i}\right] - \left[\dfrac{n^2}{i+1}\right]$ természetes szám, azért valóban csak 1 lehet. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Az $i = f(n)$ esetén kapjuk: $\left[\dfrac{n^2}{f(n)}\right] + f(n) = 2n$.

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozat alapján