

Mivel az egyenlőtlenség a , b és c -re nézve szimmetrikus, feltehetjük, hogy $a > b > c > 0$. Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $(a - b)(a - c)(b - c)$ számmal:

$$(b - c) \ln a + (c - a) \ln b + (a - b) \ln c < 0.$$

Az e^x és az $\ln x$ függvény szigorú monoton növekvő. Így az előző egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$e^{(b-c) \ln a + (c-a) \ln b + (a-b) \ln c} < e^0 = 1,$$

vagyis

$$(e^{\ln a})^{b-c} \cdot (e^{\ln c})^{c-a} \cdot (e^{\ln c})^{a-b} < 1.$$

Tovább alakítva:

$$(1) \quad \begin{aligned} a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} &< 1, \\ a^{b-c} c^{a-b} &< b^{a-c}. \end{aligned}$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak, tehát a feladat igazolásához elég (1)-et belátni. Írjuk fel a súlyozott számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget (ld. Ábrahám Gábor: *Nevezetes egyenlőtlenségek*, Mozaik Kiadó, Szeged, 1995., 18. o.) az a és c pozitív számokra a $(b - c)$ és $(a - b)$ pozitív súlyokkal:

$$a^{-c} \sqrt{a^{b-c} \cdot c^{a-b}} \leq \frac{(b - c)a + (a - b)c}{a - c} = \frac{b(a - c)}{a - c} = b.$$

$a \neq c$ miatt egyrészt a jobb oldala nevezője nem lehetett 0, másrészt egyenlőség sem állhat fenn. Mivel mindkét oldal pozitív, ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt az $(a - c)$ kitevőre hatványozzuk. Ezután a hatványozás után pedig éppen (1)-et kapjuk.