Ismeretes, hogy bármely pozitív szám és reciprokának összege nagyobb vagy egyenlő, mint 2. Ezt írjuk fel az $a+\dfrac{1}{a}$, $b+\dfrac{1}{b}$, $ab+\dfrac{1}{ab}$ kifejezésekre, és adjuk össze az egyenlőtlenség megfelelő oldalait. Azt kapjuk, hogy

$$a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+ab+\frac{1}{ab}\ge 6.$$

Adjunk mindkét oldalhoz 2-t, és rendezzük át a bal oldalt:

$$1+ab+\frac{1}{ab}+1+a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{a}=1+ab+\frac{1+ab}{ab}+\frac{1+ab}{b}+\frac{1+ab}{a}\ge 8.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát az $1+ab>0$-val végigosztva:

$$1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{8}{1+ab},$$

éppen a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés. A feladat általánosítható az a_1, a_2, $\ldots$, a_n pozitív számokra a következőképpen:

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\ge\frac{2^{n+1}}{1+a_1a_2\ldots a_n}.$$

Az állítás a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával igazolható.

Pataki Péter (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., II. o.t.)