Fel fogjuk használni az ismert (és könnyen ellenőrizhető)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \tag{1}$$

azonosságot, valamint hogy

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2\ge 0 \tag{2}$$

és

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{2}\left(x+y+z\right)^2\le\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right). \tag{3}$$

Ha behelyettesítjük (1)-be az $x=\sqrt[3]{4}a$, $y=\sqrt[3]{2}b$, $z=c$ számokat, a bal oldalon a $4a^3+2b^3+c^3-6abc$ kifejezés fog állni. Először megmutatjuk, hogy ennek értéke 0-tól különböző egész szám. Az hogy egész, triviális, mert a, b, c egészek. Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $4a^3+2b^3+c^3-6abc$ lehet 0 úgy, hogy a, b, c nem mind 0. Tekintsünk az ilyen a, b, c, számhármasok közül egy olyat, amelyben $|a|+|b|+|c|$ minimális. A c páros, mert c^3 kivételével az összes tag biztosan páros. Ekkor viszont b is páros, mert $2b^3$-től eltekintve mindegyik tag osztható 4-gyel. Végül a is páros, mert a $2b^3+c^3-6abc$ kifejezés osztható 8-cal. Ha a, b, c mindegyike páros, akkor az $a_1=\frac{a}{2}$, $b_1=\frac{b}{2}$, $c_1=\frac{c}{2}$ számokra $4a_1^3+2b_1^3+c_1^3-6a_1b_1c_1=\frac{1}{8}\left(4a^3+2b^3+c^3-6abc\right)=0$, viszont ez ellentmond annak, hogy $|a|+|b|+|c|$ minimális.

Az eddigiek alapján tehát

$$\begin{aligned}1&\le\left|4a^3+2b^3+c^3-6abc\right|=\\&=\left|\sqrt[3]{4}a+\sqrt[3]{2}b+c\right|\cdot\left(2\sqrt[3]{2}a^2+\sqrt[3]{4}b^2+c^2-2ab-\sqrt[3]{2}bc-\sqrt[3]{4}ca\right)\le\\&\le\left|\sqrt[3]{4}a+\sqrt[3]{2}b+c\right|\cdot\frac{3}{2}\left(2\sqrt[3]{2}a^2+\sqrt[3]{4}b^2+c^2\right)<\left|\sqrt[3]{4}a+\sqrt[3]{2}b+c\right|\cdot\left(4a^2+3b^2+2c^2\right).\end{aligned}$$

Ebből az állítás egyszerű átrendezéssel adódik.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV.o.t.) dolgozata nyomán

Megjegyzés. A megoldásban azt az erősebb állítást láttuk be, hogy

$$\left|\sqrt[3]{4}a+\sqrt[3]{2}b+c\right|>\frac{1}{3\sqrt[3]{2}a^2+\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}b^2+\frac{3}{2}c^2}.$$

A jobb oldal nevezőjében szereplő konstansok élesek. Definiáljuk minden n pozitív egészre az (a_n,b_n,c_n) számhármast a következőképpen:

$$\sqrt[3]{4}a_n+\sqrt[3]{2}b_n+c_n=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^n.$$

A fentiek alapján nem nehéz bebizonyítani, hogy

$$\left(\sqrt[3]{4}a_n+\sqrt[3]{2}b_n+c_n\right)\cdot\left(3\sqrt[3]{2}a_n^2+\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}b_n^2+\frac{3}{2}c_n^2\right)\to 1.$$