I. megoldás. Minden k pozitív egészre konstruálunk olyan G_k háromszögmentes gráfot, amely nem színezhető ki k színnel.

Ha $k = 1$, akkor a két pontú, egy élű gráf megfelelő. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk G_{k-1}-et; most megkonstruáljuk G_k-t.

Legyen G_{k-1} pontjainak száma s, és legyen N pozitív egész (N pontos értékét később határozzuk meg), vegyünk fel egy N-elemű H ponthalmazt, valamint $\binom{N}{s}$ darab, G_{k-1}-gyel izomorf gráfot, legyenek ezek $G^1_{k-1}, \ldots, G^{\binom{N}{s}}_{k-1}$. Mindegyik G^i_{k-1}-nek feleltessük meg H egy s-elemű részhalmazát, és kössük össze G^i_{k-1} minden pontját a megfelelő részhalmaz egy-egy pontjával. Azt állítjuk, hogy az így kapott gráf háromszögmentes, és megfelelő N esetén nem színezhető ki k színnel.

Ha lenne háromszög, akkor annak legfeljebb egy csúcsa lehet H-ban, mert H-beli pontok között nincs él. Nem lehetnek csúcsai különböző G^i_{k-1}-kben sem, mert az ilyenek között sincs él. Nem lehet mindhárom pont ugyanabban a G^i_{k-1}-ben sem, mert G^i_{k-1} háromszögmentes. Már csak az az eset maradt, hogy egy csúcsa H-ban van, a másik kettő pedig ugyanabban a G^i_{k-1}-ben. Viszont H-beli pontból legfeljebb egy G^i_{k-1}-beli pontba megy él.

Tegyük fel, hogy a gráfot kiszíneztük $k-1$ színnel. Ha N elég nagy, például $N > (s-1)(k-1)$, akkor H-ban van s darab egyszínű pont, legyen ezek színe piros. Az ezeknek megfelelő G^i_{k-1}-ben nem szerepelhet a piros szín, ez viszont ellentmond annak, hogy legalább $k-1$ szín szükséges a színezéséhez.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. Egy másik konstrukciót mutatunk. Tegyük ismét fel, hogy G_{k-1} már létezik, pontjai legyenek P_1, $\ldots$, P_s. Vegyük még fel a $Q_1, \ldots, Q_s$ és R pontokat. Kössük össze P_i-t Q_j-vel, ha P_i és P_j össze van kötve, továbbá kössük össze R-et mindegyik Q_i-vel. Ha az így kapott gráfban lenne háromszög, annak legfeljebb egy csúcsa lehet a Q_i-k között, mert a Q_i-k között nem fut él; ebből kifolyólag R sem szerepel háromszögben. Ha pedig P_i, P_j és Q_l háromszöget alkot, akkor P_i, P_j és P_l is, ami ellentmond annak, hogy G_{k-1} háromszögmentes.

Tegyük fel, hogy a gráf kiszínezhető $k-1$ színnel. Legyen R színe piros. Megadjuk a $P_1, \ldots, P_s$ pontok egy jó színezését $k-2$ színnel. Ez ellent fog mondani annak, hogy G_{k-1} színezéséhez legalább $k-1$ szín kell.

Minden egyes piros P_i-t változtassuk Q_i színére. A Q_i pontok között nem szerepel a piros szín, mert közös szomszédjuk, R piros. A P_i-ket tehát csak legfeljebb $k-2$ színnel színeztük. Ha P_i és P_j között fut él, akkor vagy mindkettő színét változatlanul hagytuk, és emiatt különbözőek maradtak, vagy az egyikük piros volt (mondjuk P_i), és annak színét Q_i színére változtattuk. Viszont Q_i és P_j között van él, Q_i és P_j színe különböző volt, tehát a módosított színezésben is P_i és P_j különböző színű.

Több dolgozat alapján